

Двойной подсчёт

1. Рассмотрим натуральные числа $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n = m$. Через b_k обозначим количество таких a_i , что $a_i \geq k$. Докажите, что:

$$a_1 + \dots + a_n = b_1 + \dots + b_m.$$

2. Будем рассматривать перестановки множества $\{1, \dots, n\}$. Через $p_n(k)$ обозначим количество тех из них, что оставляют на месте ровно k элементов. Докажите, что $\sum_{k=0}^n k p_n(k) = n!$.

3. В графе степень каждой вершины равна k , у каждой пары смежных вершин ровно l общих соседей, у каждой пары несмежных — ровно m общих соседей. Докажите, что

$$m(n - k) - k(k - l) + k - m = 0$$

4. Талантливые ученики в количестве n штук ($n \geq 3$ и нечетно) пишут тест из m вопросов (каждый вопрос подразумевает ответ «да» или «нет»). Известно, что у любых двух совпадает не более k ответов (каждый ответил на все вопросы). Докажите, что $\frac{k}{m} \geq \frac{n-1}{2n}$.
5. На плоскости отмечено n точек общего положения. Известно, что для каждой из отмеченных этих точек найдется k отмеченных точек, равноудаленных от данной. Докажите, что $k < \frac{1}{2} + \sqrt{2n}$.