Теорема Виета. Добавка

Определение. Многочлен от n переменных $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется *симметрическим*, если он не изменяется при всех перестановках переменных $x_1, \ldots, x_n$.

Определение.

$$\sigma_1 = x_1 + \ldots + x_n,$$
$$\sigma_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n \quad \text{(сумма всех попарных произведений)},$$
$$\ldots$$
$$\sigma_{n-1} = x_1x_2\cdots x_{n-1} + x_1x_2\cdots x_{n-2}x_n + \ldots + x_2x_3\cdots x_n,$$
$$\sigma_n = x_1x_2\cdots x_n.$$

Многочлены σ_k называются *основными (элементарными)* симметрическими многочленами.

Теорема Виета. Пусть многочлен $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots a_1x + a_0$ имеет n корней (с учетом кратности): $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Тогда $\sigma_k = (-1)^k \frac{a_{n-k}}{a_n}$, для любого $1 \leqslant k \leqslant n$.

Основная теорема о симметрических многочленах. Пусть $P(x_1, \ldots, x_n)$ — симметрический многочлен от n переменных, тогда его единственным образом можно представить в виде $P(x_1, \ldots, x_n) = g(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$, где g — многочлен, а σ_k — элементарные симметрические многочлены от n переменных.

1. Пусть действительные числа a, b, c таковы, что

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a+b+c}.$$

Докажите, что для любого нечетного натурального k выполняется равенство:

$$\frac{1}{a^k} + \frac{1}{b^k} + \frac{1}{c^k} = \frac{1}{a^k+b^k+c^k}.$$

2. (a) *Формула Ньютона.* Докажите, что

$$S_k = S_{k-1}\sigma_1 - S_{k-2}\sigma_2 + \ldots + (-1)^k S_0\sigma_k,$$

где $S_k = x_1^k + \ldots + x_n^k$, а σ_k — элементарные симметрические многочлены от n переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

(b) Пусть имеются два упорядоченных набора чисел $x_1 < x_2 < \ldots < x_7$ и $y_1 < y_2 < \ldots < y_7$. Известно, что $x_1 < y_1$ и суммы k-ых степеней равны для всех k от 1 до 6. Докажите, что $x_7 < y_7$.

3. Пусть $x_1, \ldots, x_n$ — корни многочлена $x^n + x^{n-1} + \ldots + x + 1$. Докажите, что

$$\frac{1}{1-x_1} + \ldots + \frac{1}{1-x_n} = \frac{n}{2}.$$