

## Функциональные уравнения. Добавка

11. Функция  $f$  такова, что для любых положительных  $x, y$  выполнено  $f(xy) = f(x) + f(y)$ . Найдите  $f(2011)$ , если  $f\left(\frac{1}{2011}\right) = 1$ .
12. Доказать, что любая функция представляется в виде
- (а) суммы чётной и нечётной функции;
  - (б) суммы двух функций, графики которых центрально-симметричны (возможно, относительно различных точек).
13. Дана последовательность функций  $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Докажите, что найдётся такая функция  $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , что для любого  $n$  выполнено  $F(x) > f_n(x)$  на каком-то луче (лучи для разных  $n$  могут быть разными).
14. Пусть  $f(x) = x^2 + 12x + 30$ . Решите уравнение:

$$f(f(f(f(f(f(x))))))) = 0$$

15. (а) Решите в натуральных числах уравнение  $x^y = y^x$ .  
(б) Что больше:  $\pi^e$  или  $e^\pi$ ?
16. Что больше:  
(а)  $\log_3 4$  или  $\log_4 5$ ; (б)  $\log_{n-1} n$  или  $\log_n(n+1)$ ?
17. Найдите такую функцию  $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}^*$ , что

$$f(f(x)) = \frac{1}{x}.$$

( $\mathbb{R}^*$  обозначает  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ .)

18. Для вещественных  $x > y > 0$  и натуральных  $n > k$  докажите неравенство

$$(x^k - y^k)^n < (x^n - y^n)^k$$

19. Последовательность  $a_n$  такова:

$$a_0 = a, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2011}a_n^7 + \frac{1}{2012}a_n^5 + a_n$$

При каких  $a$  эта последовательность будет ограничена (то есть найдётся  $M$ , что для любого  $n$   $|a_n| < M$ )?