

Функциональные уравнения

Найдите все функции f , удовлетворяющие уравнению (если не указано иное).

1. $2f(x) + f(1 - x) = x^2$, где $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.
2. $f(x) + 2f(1/x) = 3x$, где $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$.
3. $f(x + y) + f(x - y) = 2f(x) \cos y$, где $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.
4. Существуют ли функции $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ такие, что при любых x
(а) $f(g(x)) = x^2$, $g(f(x)) = x^3$? (б) $f(g(x)) = x^2$, $g(f(x)) = x^4$?
5. Найдите все $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$, такиеш что $f(1) = 2$ и $f(xy) = f(x)f(y) - f(x + y) + 1$ при всех $x, y \in \mathbb{Q}$.
6. Дано натуральное число n . Найдите все непрерывные $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ такие, что $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $\underbrace{f(f(\dots f(x) \dots))}_n = x$ для любого $x \in [0, 1]$.
7. Найти все непрерывные $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, такие что $f(x + y) = f(x) + f(y) + xy(x + y)$.
8. Найти все функции $f: \mathbb{Q} \rightarrow \{-1, 1\}$ такие, что равенство $f(x) \cdot f(y) = -1$ выполнено для всех $x \neq y \in \mathbb{Q}$ при любом из условий $x + y = 0$, $x + y = 1$, $x \cdot y = 1$.
9. Дано $n \in \mathbb{N}$. Определенная для точек плоскости вещественнозначная функция такова, что $f(A_1) + f(A_2) + \dots + f(A_n) = 0$ выполняется для любого правильного n -угольника $A_1 A_2 \dots A_n$. Найдите все такие функции.
- 10.* Докажите, что функция $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющая одному из следующих двух тождеств: $f(x) + f(y) \equiv f(x + y)$, $f(x \cdot y + x + y) \equiv f(x \cdot y) + f(x) + f(y)$, удовлетворяет и другому.