

## Алгебраический разницей — добавка

11. Дано натуральное число  $n$  такое, что число  $2^n + 1$  — простое. Докажите, что для некоторого целого  $k$  выполнено  $n = 2^k$ .
12. На доске выписана десятичная запись числа  $7^{2013}$ . Вася осуществляет следующий процесс: он стирает первую цифру написанного на доске числа и прибавляет её к оставшемуся числу, после чего выписывает результат на доску вместо старого числа. Когда на доске, наконец, появилось десятизначное число, Вася успокоился. Докажите, что какие-то две цифры этого числа совпадают.
13. Для каждого натурального  $n$  обозначим через  $S_n$  сумму первых  $n$  простых чисел:  $S_1 = 2$ ,  $S_2 = 2 + 3 = 5$ ,  $S_3 = 2 + 3 + 5 = 10$ , ... Могут ли два подряд идущих члена последовательности  $(S_n)$  оказаться квадратами натуральных чисел? *Регион 2010, 9.8*
14. Дан выпуклый пятиугольник. Петя выписал в тетрадь значения синусов всех его углов, а Вася — значения косинусов всех его углов. Оказалось, что среди выписанных Петей чисел нет четырех различных. Могут ли все числа, выписанные Васей, оказаться различными? *Регион 2012, 10.5*
15. Натуральное число  $m$  таково, что сумма цифр в десятичной записи числа  $2^m$  равна 8. Может ли при этом последняя цифра числа  $2^m$  быть равной 6? *Регион 2009, 10.5*