

Тренировочная олимпиада — 1, 10 класс

1. В клетках таблицы 9×9 расставили все натуральные числа от 1 до 81. Вычислили произведения чисел в каждой строке таблицы и получили набор из девяти чисел. Затем вычислили произведения чисел в каждом столбце таблицы и также получили набор из девяти чисел. Могли ли полученные наборы оказаться одинаковыми?
2. В произвольный треугольник вписана окружность. Проведем три касательные к ней параллельно сторонам треугольника. Докажите, что периметр образовавшегося шестиугольника не превосходит $\frac{2}{3}$ периметра исходного треугольника.
3. Докажите, что уравнение $l^2 + m^2 = n^2 + 3$ имеет бесконечно много решений в натуральных числах.
4. Дана равнобокая трапеция $ABCD$ ($AD \parallel BC$). На дуге AD (не содержащей точек B и C) описанной окружности этой трапеции произвольно выбрана точка M . Докажите, что основания перпендикуляров, опущенных из вершин A и D на отрезки BM и CM , лежат на одной окружности.

Окружной тур в это воскресенье, 7 декабря. Не продолжайте!

Тренировочная олимпиада — 1, 11 класс

1. Последовательность чисел строится следующим образом. Первое число в ней равно 2. Каждое последующее число равно сумме кубов цифр предыдущего числа. Вася утверждает, что среди чисел этой последовательности встретятся два одинаковых числа, Коля — что этого никогда не произойдет. Кто из них прав?

2. Докажите, что для всех x выполняется неравенство:

$$x^2 + x \sin x + x^2 \cos x + 0.5 > 0.$$

3. В правильной четырехугольной усеченной пирамиде середина N ребра B_1C_1 верхней грани $A_1B_1C_1D_1$ соединена с серединой M ребра AB нижней грани $ABCD$ (буквы в гранях соответствуют). Докажите, что проекции ребер B_1C_1 и AB на прямую MN равны между собой.
4. Две окружности касаются внешним образом. A — точка касания их общей внешней касательной с одной из окружностей, B — точка той же окружности, диаметрально противоположная точке A . Докажите, что длина касательной, проведенной из точки B ко второй окружности, равна диаметру первой окружности.

Окружной тур в это воскресенье, 7 декабря. Не продолжайте!