

Графы-1

Определение. *Граф* — это конечный набор *вершин*, и некоторый набор *ребер* — неупорядоченных пар различных вершин. *Степень вершины* — количество ребер, в которых она содержится.

Определение. *Пути* и *циклы* — это цепочки из вершин, последовательно соединенных ребрами. Циклы к тому же замкнуты.

Определение. *Простые* пути и циклы — проходят через каждую вершину не более чем по одному разу (не самопересекаются).

1. (а) Докажите, что если две вершины соединены путем, то они соединены и простым путем.
(б) Пусть в графе есть цикл. Можно ли утверждать, что в нём есть простой цикл?
Пункты сдаются одновременно.

Определение. *Связный* граф — любые две вершины соединены путем.

Деревья

Определение. *Дерево* — связный граф, в котором нет (простых) циклов.

2. Пусть в дереве G есть хотя бы две вершины.
(а) *Висячая вершина.* Докажите, что в G есть хотя бы одна вершина степени 1.
(б) Докажите, что количество ребер в G на один меньше, чем количество вершин.
Пункты сдаются одновременно.
3. (а) Докажите, что в G есть хотя бы две вершины степени 1.
(б) Докажите, что если в графе есть (не обязательно простой) цикл, проходящий по некоторому ребру ровно один раз, то есть и простой цикл.
(с) Докажите, что если в графе есть (не обязательно простой) цикл, проходящий по некоторому ребру нечетное раз, то есть и простой цикл.
4. *Остовное дерево.* Докажите, что в любом связном графе можно удалить несколько ребер так, чтобы полученный граф стал деревом.

Разное

- 5.° Можно ли на плоскости нарисовать 15 отрезков так, чтобы каждый пересекал ровно 7 других?

6. В стране 101 город и из каждого города ведет не менее 50 дорог. Докажите, что из любого города можно добраться в любой другой (возможно с пересадками).
7. В лагере у каждого пионера 20 друзей. Как только пионер узнает новость, он тут же сообщает её своим друзьям. За завтраком один из пионеров узнал новость, и к обеду её знал весь лагерь. За ужином двое пионеров поссорились. На следующий день за завтраком пионеру (не обязательно тому же) сообщают новость. Докажите, что к обеду о ней опять узнает весь лагерь.
8. В стране любые два города соединены либо авиалинией, либо железной дорогой. Министерство транспорта в рамках программы экономии хочет закрыть один из этих видов перевозок.
 - (a) Докажите, что оно может это сделать так, чтобы из любого города можно было добраться в любой другой.
 - (b) Каким числом пересадок можно гарантированно обойтись после этого?
9. В стране 2014 городов, и из каждого выходит не менее, чем 93 дороги. Известно, что из каждого города можно добраться до любого другого. Докажите, что это можно сделать с не более, чем 63 пересадками.
10. На какое наименьшее число частей нужно разрезать проволоку длиной 12 сантиметров, что бы из неё можно было сложить каркас кубика со стороной 1 сантиметр?
- 11.* В королевстве 16 городов. Король хочет соединить их дорогами так, что бы из каждого города выходило не более 4 дорог и из любого можно было добраться до любого другого, сделав не более 1 пересадки. Сможет ли он это сделать?