Прямоугольный треугольник

В треугольнике ABC с прямым углом $\angle C$ построены: CH — высота, O, O_1, O_2 — центры окружностей, вписанных в треугольники ABC, ACH и CBH соответственно, r, r_1, r_2 — их радиусы. Прямая O_1O_2 пересекает стороны AC и BC в точках U и V соответственно. Прямые CO_1 и CO_2 пересекают сторону AB в точках P и Q соответственно. Докажите следующие утверждения:

Уголки

1. Треугольники ACQ и BCP равнобедренные.

2. (a) Точка O — ортоцентр (точка пересечения высот) треугольника CO_1O_2.
(b) А еще $CU = CV$.

3. Точки A, O_1, O_2, B лежат на одной окружности.

4. Точки A, P, O, C, чудесным образом, тоже лежат на одной окружности.

5. Описанные окружности треугольников ACO_1 и BCO_2 касаются в точке C с общей касательной OC.

6. Неожиданно $PO_2 \parallel AO$ и $QO_1 \parallel BO$.

Подобие

7. Треугольники ACH и BCH подобны ABC с коэффициентами k_1 и k_2 такими, что $k_1^2 + k_2^2 = 1$.

8. Для радиусов вписанных окружностей выполнено равенство $r^2 = r_1^2 + r_2^2$.

9. Треугольники O_1O_2H и ABC подобны.

10. Внезапно, $O_1O_2 = CO$.

Утверждение. Площадь S любого треугольника выражается через радиус r его вписанной окружности и его стороны a, b и c:

$$S = \frac{r \cdot (a + b + c)}{2}$$

11. И еще одно волшебное наблюдение: $r + r_1 + r_2 = CH$.