

Неравенства. Добавка

Решите задачи, применяя неравенства о средних.

10. Для положительных чисел a_1, a_2, \dots, a_n докажите неравенство

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \dots + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1} \geq n.$$

11. Произведение положительных чисел x, y, z равно 1. Докажите, что

$$(2+x)(2+y)(2+z) \geq 27.$$

12. Рассматриваются такие наборы действительных чисел $x_1, x_2, \dots, x_{20} \in [0; 1]$, что

$$x_1 \cdot \dots \cdot x_{20} = (1-x_1) \cdot \dots \cdot (1-x_{20}).$$

Найдите среди этих наборов такой, для которого значение $x_1 \cdot \dots \cdot x_{20}$ максимально.

13. Положительные числа a, b, c, d удовлетворяют условию

$$2(a+b+c+d) \geq abcd.$$

Докажите, что $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geq abcd$.

14. Пусть a, b, c — положительные числа. Докажите, что

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$