

## Инварианты

1. На вешалке висят 20 платков. 17 девочек по очереди подходят к вешалке, и каждая либо снимает, либо вешает ровно один платок. Может ли после ухода девочек на вешалке остаться 10 платков?
2. В таблице  $m \times n$  расставлены числа так, что сумма чисел в любой строке или столбце равна 1. Докажите, что  $m = n$ .
3. В одном бидоне находится 1 л воды, а в другом — 1 л спирта. Разрешается переливать любую часть жидкости из одного бидона в другой. Можно ли добиться, чтобы во втором бидоне концентрация спирта оказалась меньше 50%?
4. В одной клетке квадратной таблицы  $4 \times 4$  стоит знак минус, а в остальных стоят плюсы. Разрешается одновременно менять знак во всех клетках, расположенных в одной строке или в одном столбце. Докажите, что, сколько бы мы ни проводили таких перемен знака, нам не удастся получить таблицу из одних плюсов.
5. На 44 деревьях, расположенных по окружности, сидели 44 веселых чижа (на каждом дереве по чижу). Время от времени два чижа одновременно перелетают на соседние деревья в разных направлениях (один — по часовой стрелке, другой — против). Докажите, что чижи не смогут собраться на одном дереве.
6. Круг разделен на 6 секторов, в котором по часовой стрелке стоят числа

$$1, 0, 1, 0, 0, 0.$$

Можно прибавлять по единице к любым числам, стоящим в двух соседних секторах. Можно ли сделать все числа равными?

7. Можно ли круг разрезать на несколько частей, из которых сложить квадрат? (Разрезы — это участки прямых и дуги окружностей.)
8. На горе 1001 ступенька, на некоторых ступеньках лежат камни, по одному на ступеньке. Сизиф берет любой камень и переносит его вверх на ближайшую свободную ступеньку (т. е. если ближайшая ступенька свободна, то на неё, а если она занята, то на несколько ступенек вверх до первой свободной). После этого Аид скатывает на одну ступеньку вниз один из камней, у которых предыдущая ступенька свободна. Камней 500 и первоначально они лежали на нижних 500 ступеньках. Сизиф и Аид действуют по очереди, начинает Сизиф. Цель Сизифа — положить камень на верхнюю ступеньку. Может ли Аид ему помешать?