

## Многоугольники на решётке

1. (а) Докажите, что в любом многоугольнике можно провести либо внутреннюю, либо внешнюю диагональ.  
(б\*) Докажите, что в любом многоугольнике можно провести внутреннюю диагональ.

**Определение.** *Многоугольник на целочисленной решётке* — это многоугольник, все вершины которого лежат в точках с целыми координатами.

Далее все многоугольники — это многоугольники на решётке.

2. Докажите, что любой многоугольник, если он более-чем-три-угольник, можно представить как объединение либо разность двух многоугольников с меньшим количеством вершин.

**Определение.** *Примитивный треугольник* — треугольник с вершинами на решётке, внутри и на границе которого нет точек решётки, кроме вершин этого треугольника.

3. *Пункты сдаются одновременно.*
  - (а) Докажите, что если в треугольнике есть точка решётки (т. е. точка с целочисленными координатами), то этот треугольник можно представить как объединение трех треугольников.
  - (б) Докажите, что если на границе треугольника есть точка решётки, то этот треугольник можно представить как объединение двух треугольников.
- 4.° Площадь любого примитивного треугольника равна  $1/2$ .

**Формула Пика.** Пусть многоугольник с вершинами на решетке содержит  $n$  внутренних точек решётки и  $m$  точек решётки на своей границе (включая вершины). Тогда его площадь равна

$$S = n + m/2 - 1$$

- 5.° Проверьте формулу Пика для примитивных треугольников.
6. *Пункты сдаются одновременно.*
  - (а) Пусть многоугольник  $A$  представляется в виде объединения двух многоугольников  $B$  и  $C$ . Докажите, что если формула Пика верна для  $B$  и  $C$ , то она верна и для  $A$ .
  - (б) То же самое, если  $A$  представляется в виде разности двух многоугольников.
  - (с) Докажите формулу Пика для всех многоугольников на решётке.