

Алгебра

11 класс

08.12.2014

1. За одну операцию число m можно заменить на одно из трёх чисел: $2m + 1$, $3m + 2$, $5m + 4$. Два числа назовём *эквивалентными*, если из них с помощью таких операций можно получить одно и то же число. Найдите количество натуральных чисел, меньших 2009 и эквивалентных 2009.
 2. Пусть $f(x) = |4 - 4|x|| - 2$. Сколько вещественных решений имеет уравнение $f(f(x)) = x$?
 3. Сколько вещественных решений в интервале $(0, 2009)$ имеет уравнение $x + [x^2] = [x] + x^2$?
 4. Дано натуральное число n . Сколько решений имеет уравнение
а) $\sum_{k=1}^n [\frac{x}{2^k}] = x - 1$; б) $\sum_{k=1}^n [\frac{x}{2^k}] = x - 2$; в) $\sum_{k=1}^n [\frac{x}{2^k}] = x - d$?
 5. а) a , b - взаимно простые натуральные числа. В прямоугольнике $a \times b$ проведена диагональ. Сколько квадратов 1×1 она пересекает?
б) a , b , c - попарно взаимно простые натуральные числа. В параллелепипеде $a \times b \times c$ проведена плоскость через три вершинки, соседние с одной и той же другой вершинкой. Сколько единичных кубиков она пересекла?
 6. Пусть p - простое число вида $4k + 1$. Докажите, что $[\sqrt{p}] + [\sqrt{2p}] + \dots + [\sqrt{(p-1)p}] = \frac{(p-1)(2p-1)}{3}$.
-

Алгебра

11 класс

08.12.2014

1. За одну операцию число m можно заменить на одно из трёх чисел: $2m + 1$, $3m + 2$, $5m + 4$. Два числа назовём *эквивалентными*, если из них с помощью таких операций можно получить одно и то же число. Найдите количество натуральных чисел, меньших 2009 и эквивалентных 2009.
2. Пусть $f(x) = |4 - 4|x|| - 2$. Сколько вещественных решений имеет уравнение $f(f(x)) = x$?
3. Сколько вещественных решений в интервале $(0, 2009)$ имеет уравнение $x + [x^2] = [x] + x^2$?
4. Дано натуральное число n . Сколько решений имеет уравнение
а) $\sum_{k=1}^n [\frac{x}{2^k}] = x - 1$; б) $\sum_{k=1}^n [\frac{x}{2^k}] = x - 2$; в) $\sum_{k=1}^n [\frac{x}{2^k}] = x - d$?
5. а) a , b - взаимно простые натуральные числа. В прямоугольнике $a \times b$ проведена диагональ. Сколько квадратов 1×1 она пересекает?
б) a , b , c - попарно взаимно простые натуральные числа. В параллелепипеде $a \times b \times c$ проведена плоскость через три вершинки, соседние с одной и той же другой вершинкой. Сколько единичных кубиков она пересекла?
6. Пусть p - простое число вида $4k + 1$. Докажите, что $[\sqrt{p}] + [\sqrt{2p}] + \dots + [\sqrt{(p-1)p}] = \frac{(p-1)(2p-1)}{3}$.