

Индукция, спуск, минимальный элемент

11 класс

04.11.2014

1. Доказать, что в полном ориентированном сильно связном графе есть гамильтонов цикл. Ориентированный граф называется *сильно связным*, если в нём из любой вершины можно добраться до любой другой. *Гамильтонов цикл* - цикл, проходящий по всем вершинам графа ровно по одному разу.
2. В игре “Дота для неполноценных” каждый из персонажей *контрит* не менее 10 других. Докажите, что в игре можно выделить не менее 11 персонажей, так что первый контрит второго, второй - третьего, $\dots$, предпоследний - последнего, а последний - первого.
3. Какое максимальное количество рёбер может быть в графе с $2n$ вершинами, в котором нет треугольников?
4. Пусть $n \geq 6$, $\vartheta(n)$ - максимальное количество рёбер в графе на n вершинах, в котором любые два цикла имеют общую вершину.
 - а) Докажите, что $\vartheta(n) \leq 4n - 10$.
 - б) Докажите, что $\vartheta(n) \geq 3n - 6$.
 - в) Найдите $\vartheta(n)$.
5. Натуральные числа n, m, k таковы, что $n > m > k$. Известно, что в некотором графе существует остовное дерево, имеющее ровно n висячих вершин, и другое остовное дерево, имеющее ровно k висячих вершин. Докажите, что в графе существует остовное дерево, содержащее ровно m висячих вершин.

Индукция, спуск, минимальный элемент

11 класс

04.11.2014

1. Доказать, что в полном ориентированном сильно связном графе есть гамильтонов цикл. Ориентированный граф называется *сильно связным*, если в нём из любой вершины можно добраться до любой другой. *Гамильтонов цикл* - цикл, проходящий по всем вершинам графа ровно по одному разу.
2. В игре “Дота для неполноценных” каждый из персонажей *контрит* не менее 10 других. Докажите, что в игре можно выделить не менее 11 персонажей, так что первый контрит второго, второй - третьего, $\dots$, предпоследний - последнего, а последний - первого.
3. Какое максимальное количество рёбер может быть в графе с $2n$ вершинами, в котором нет треугольников?
4. Пусть $n \geq 6$, $\vartheta(n)$ - максимальное количество рёбер в графе на n вершинах, в котором любые два цикла имеют общую вершину.
 - а) Докажите, что $\vartheta(n) \leq 4n - 10$.
 - б) Докажите, что $\vartheta(n) \geq 3n - 6$.
 - в) Найдите $\vartheta(n)$.
5. Натуральные числа n, m, k таковы, что $n > m > k$. Известно, что в некотором графе существует остовное дерево, имеющее ровно n висячих вершин, и другое остовное дерево, имеющее ровно k висячих вершин. Докажите, что в графе существует остовное дерево, содержащее ровно m висячих вершин.