

Разнобой

11 класс

27.10.2014

1. P - произвольная точка на описанной окружности остроугольного треугольника ABC . Прямые BP , CP пересекают высоты CC_1 , BB_1 треугольника в точках X , Y соответственно. Найдите ГМТ середин отрезков XY .
2. Даны 3 попарно различных натуральных числа a_1, a_2, a_3 . Докажите, что существует такое натуральное k , что $a_1^k + a_2^k + a_3^k$ имеет простой делитель, больший 1000000.
3. На рёбрах AB , BC , CD , DA тетраэдра $ABCD$ отмечены точки K , L , M , N соответственно. Каждую из них отразили относительно середины ребра, на котором она лежит, получили K' , L' , M' , N' . Докажите, что объёмы тетраэдров $KLMN$ и $K'L'M'N'$ равны.
4. Найти хотя бы одну тройку целых чисел x, y, z , больших чем 50, и удовлетворяющих уравнению $x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz$.
5. Два игрока по очереди ставят фишки на доску $n \times n$. Нельзя ставить фишки в занятые клетки, нельзя, чтобы после хода игрока в строке или столбце находилось больше двух фишек. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре?
6. В таблице из m столбцов и n строк ($m > n$) в некоторых клетках стоят звёздочки. Известно, что в любом столбце хотя бы одна звёздочка есть. Докажите, что существует звёздочка, такая что количество звёздочек в строке, её содержащей, строго больше, чем звёздочек в столбце, её содержащем.

Разнобой

11 класс

27.10.2014

1. P - произвольная точка на описанной окружности остроугольного треугольника ABC . Прямые BP , CP пересекают высоты CC_1 , BB_1 треугольника в точках X , Y соответственно. Найдите ГМТ середин отрезков XY .
2. Даны 3 попарно различных натуральных числа a_1, a_2, a_3 . Докажите, что существует такое натуральное k , что $a_1^k + a_2^k + a_3^k$ имеет простой делитель, больший 1000000.
3. На рёбрах AB , BC , CD , DA тетраэдра $ABCD$ отмечены точки K , L , M , N соответственно. Каждую из них отразили относительно середины ребра, на котором она лежит, получили K' , L' , M' , N' . Докажите, что объёмы тетраэдров $KLMN$ и $K'L'M'N'$ равны.
4. Найти хотя бы одну тройку целых чисел x, y, z , больших чем 50, и удовлетворяющих уравнению $x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz$.
5. Два игрока по очереди ставят фишки на доску $n \times n$. Нельзя ставить фишки в занятые клетки, нельзя, чтобы после хода игрока в строке или столбце находилось больше двух фишек. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре?
6. В таблице из m столбцов и n строк ($m > n$) в некоторых клетках стоят звёздочки. Известно, что в любом столбце хотя бы одна звёздочка есть. Докажите, что существует звёздочка, такая что количество звёздочек в строке, её содержащей, строго больше, чем звёздочек в столбце, её содержащем.