

Формула обращения Мёбиуса

11 класс

13.10.2014

Определение. $\mu(n)$ - функция Мёбиуса, определённая на натуральных числах по следующему правилу: если $n = 1$, то $\mu(n) = 1$; если $n = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_k$, где p_i - различные простые числа, то $\mu(n) = (-1)^k$; если n делится на квадрат простого, то $\mu(n) = 0$.

1. Докажите, что для всех натуральных $n > 1$ $\sum_{d|n} \mu(d) = 0$, а для $n = 1$ $\sum_{d|n} \mu(d) = 1$.

2. (Формула обращения Мёбиуса) f и g - функции натуральных чисел.

Утверждение 1: при всех натуральных n $f(n) = \sum_{d|n} g(d)$.

Утверждение 2: при всех натуральных k $g(k) = \sum_{d|k} \mu(d) f(k/d)$.

Докажите, что а) $1 \Rightarrow 2$; б) $2 \Rightarrow 1$.

3. Выведите из предыдущего равносильность формул для функции Эйлера ($n = p_1^{q_1} \cdot p_2^{q_2} \cdot \dots \cdot p_k^{q_k}$):

$$\varphi(n) = n(1 - \frac{1}{p_1})(1 - \frac{1}{p_2}) \dots (1 - \frac{1}{p_k}) \iff n = \sum_{d|n} \varphi(d).$$

4. Докажите следующую формулу для количества $A(n, t)$ ожерелий длины n из камней t цветов:

$$A(n, t) = \sum_{xy|n} \frac{t^x \mu(y)}{xy}.$$

В этой задаче ожерелья можно поворачивать, но нельзя переворачивать.

5. Пусть d_k - количество неприводимых многочленов над $\mathbb{Z}_p$ степени k со старшим коэффициентом 1 (p - простое).

а) Напишите в терминах производящих функций зависящее от параметров $d_1, d_2, \dots$ равенство, означающее, что любой многочлен со старшим коэффициентом 1 единственным образом раскладывается в произведение неприводимых со старшим коэффициентом 1 (с точностью до порядка сомножителей).

б) Докажите, что $d_n = \frac{1}{n} \cdot \sum_{d|n} \mu(d) p^{n/d}$.

Не исключено, что при решении этой задачи вам понадобится формула:

$$\ln(1+x) = x - x^2/2 + x^3/3 + \dots - (-x)^k/k + \dots$$