

Процессы с одним исходом

11 класс

02.10.2014

1. В ряд выписаны положительные числа a_1, a_2, \dots, a_n . За ход разрешается взять любые два числа x, y и заменить их выражением $\frac{xy}{x+y}$. Докажите, что результат процесса не зависит от порядка операций.
2. На доске выписаны натуральные числа a_1, a_2, \dots, a_n . За ход разрешается взять пару чисел, ни одно из которых не делится на второе, и заменить их на их НОД и НОК.
 - а) Докажите, что как бы мы не действовали, мы не сможем проворачивать эту операцию бесконечно долго.
 - б) Докажите, что как бы мы не действовали, мы придём к одному и тому же множеству чисел.
3. В ряд стоит 100 коробок, в самой левой из них лежит 100 спичек. За ход разрешается из любой коробки переложить одну спичку в соседнюю справа коробку, при условии, что в исходной коробке останется не меньше спичек, чем получится в той, куда спичку мы добавили. Докажите, что результат процесса не зависит от порядка операций.
4. **Очень важная задача** Дан ориентированный граф (без петель). Известно, что для любой его вершины u и для любых двух её потомков x, y существует вершина t , такая что существуют пути из x в t и из y в t . Докажите, что для каждой вершины u графа существует единственная вершина v исходящей степени 0, такая что существует путь из u в v ; при этом про граф известно, что
 - а) в нём конечное число вершин и нет циклов;
 - б) в нём бесконечное число вершин, но при этом нет никаких бесконечных путей (в частности, циклов нет).

Комментарий к задаче: при этих условиях на граф результат блуждания по графу зависит только от начальной вершины и не зависит от самого блуждания.