Воспоминания о теории чисел

11 Класс

18.09.2014

1. p - простое число, $n < p$ - натуральное. Докажите, что $(n-1)! \cdot (p-n)! \equiv (-1)^n \pmod{p}$.
2. p - простое число; $a_1, \ldots, a_p$ - конечная арифметическая прогрессия с разностью, не кратной p. Докажите, что в ней можно найти элемент a_k, такой что число $a_k + a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_p$ делится на p^2
3. Натуральные числа a, n таковы, что $a^{n-1} - 1$ кратно n и $a^x - 1$ не кратно n ни для какого делителя x числа $n-1$, отличного от него самого. Докажите, что n - простое число.
4. $n > 3$ - нечётное натуральное число. Докажите, что число $2^{\varphi(n)} - 1$ имеет простой делитель, которого не имеет число n.
5. $3^n - 2^n = p^k$ для некоторых натуральных n, k и простого p. Докажите, что n - простое.
6. Докажите, что существует такая бесконечная возрастающая последовательность натуральных чисел a_n, такая что для любого целого неотрицательного k последовательность $b_n = a_n + k$ содержит лишь конечное число простых чисел.
7. Найдите все пары простых чисел p и q, такие что для любого натурального a число $a^{3pq} - a$ делится $3pq$.

Воспоминания о теории чисел

11 Класс

18.09.2014

1. p - простое число, $n < p$ - натуральное. Докажите, что $(n-1)! \cdot (p-n)! \equiv (-1)^n \pmod{p}$.
2. p - простое число; $a_1, \ldots, a_p$ - конечная арифметическая прогрессия с разностью, не кратной p. Докажите, что в ней можно найти элемент a_k, такой что число $a_k + a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_p$ делится на p^2
3. Натуральные числа a, n таковы, что $a^{n-1} - 1$ кратно n и $a^x - 1$ не кратно n ни для какого делителя x числа $n-1$, отличного от него самого. Докажите, что n - простое число.
4. $n > 3$ - нечётное натуральное число. Докажите, что число $2^{\varphi(n)} - 1$ имеет простой делитель, которого не имеет число n.
5. $3^n - 2^n = p^k$ для некоторых натуральных n, k и простого p. Докажите, что n - простое.
6. Докажите, что существует такая бесконечная возрастающая последовательность натуральных чисел a_n, такая что для любого целого неотрицательного k последовательность $b_n = a_n + k$ содержит лишь конечное число простых чисел.
7. Найдите все пары простых чисел p и q, такие что для любого натурального a число $a^{3pq} - a$ делится $3pq$.