

1. Покажите, что если произведение положительных чисел $x_1, x_2, \dots, x_n = 1$, то $x_1 + x_2 + \dots + x_n \geq n$.
2. Покажите, что если сумма чисел x_1, x_2, \dots, x_n равна 1, то $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \geq \frac{1}{n}$.
3. Докажите цепочку неравенств

$$\sqrt{\frac{x_1^2 + \dots + x_n^2}{n}} \geq \frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \dots x_n}$$

4. Докажите, что если $x_1, \dots, x_n > 0$ и $x_1 + \dots + x_n = 1$, то

$$\frac{(1-x_1)(1-x_2)\dots(1-x_n)}{x_1 \dots x_n} \geq (n-1)^n.$$

5. Докажите, что если $x_1, \dots, x_n \geq 1$ и $n \geq 2$, то

$$\frac{1}{1+x_1} + \dots + \frac{1}{1+x_n} \geq \frac{n}{1+\sqrt[n]{x_1 \dots x_n}}$$

6. Докажите, что если $x, y, z \geq 0$ и $x + y + z = 1$, то

$$0 \leq xy + yz + zx - 2xyz \leq \frac{7}{27}.$$

7. Докажите, что если $a, b, c, d \geq 0$ и $a + b + c + d = 1$, то

$$abc + bcd + cda + dab \leq \frac{1}{27} + \frac{176}{27}abcd.$$

8. Докажите, что

$$\sum_{i=1}^n x_i^k (1-x_i) \leq a_k,$$

где $k \geq 2$, $k \in \mathbb{N}$ и $a_k = \max_{[0;1]} (x^k(1-x) + (1-x)^k x)$, а $x_i \geq 0$, $i = 1, \dots, n$, $x_1 + \dots + x_n = 1$, $n \geq 2$.