

# Высоты и середины

9 класс

10.10.13

В задачах этого листика треугольник  $ABC$  - остроугольный неравобедренный треугольник,  $A_1, B_1, C_1$  - основания высот.  $H, O$  - ортоцентр и центр описанной окружности треугольника.

1. Докажите, что  $H$  - центр вписанной окружности треугольника  $A_1B_1C_1$ .
2. Точку  $C_1$  отразили симметрично относительно стороны  $BC$ . Докажите, что она попала на прямую  $A_1B_1$ .
3. а. Докажите, что точка  $H_1$ , симметричная  $H$  относительно стороны  $BC$ , лежит на описанной окружности треугольника.  
б. Докажите, что точка  $H_2$ , симметричная  $H$  относительно середины стороны  $BC$ , лежит на описанной окружности треугольника, причем  $AH_2$  - ее диаметр.
4. Докажите, что основания перпендикуляров, опущенных из  $A_1$  на  $BA, BB_1, CA, CC_1$ , лежат на одной прямой.
5. Докажите, что  $B_1C_1$  перпендикулярна  $AO$ .
6. В трапеции  $KLMN$  сумма углов при основании  $KN$  равна  $90^\circ$ .  $P$  и  $Q$  - середины  $LM$  и  $KN$ . Докажите, что  $KN - LM = 2PQ$ .
7. Докажите, что  $H, A_1$  и середины высот  $BB_1$  и  $CC_1$  лежат на одной окружности.
8. Точки  $P$  и  $Q$  выбраны так, что  $BOAP$  и  $COPQ$  - параллелограммы. Докажите, что  $Q$  совпадает с  $H$ .
9. Описанная окружность треугольника  $CA_1B_1$  пересекает описанную окружность треугольника  $ABC$  в точке  $K$ . Докажите, что прямая  $KH$  проходит через середину  $AB$ .