Сложные задачи для тех, кому нечего порешать

1. AD и BE — биссектрисы треугольника ABC. Известно, что угол $\angle ADE = 24°$ и $\angle BED = 18°$. Найдите углы треугольника ABC.

2. Двое играют в крестики-нолики на клетчатой плоскости, причем за один ход первый ставит крестик, а второй четыре нолика. Первый выиграет, если ему удастся поставить три крестика в ряд. Может ли второй ему помешать?

3. В квадратной темной комнате размером 20 м $\times$ 20 м бегает таракан со скоростью 0,1 м/с. Сможет ли Петя поймать таракана, если у него есть фонарь, освещающий круг радиуса 2 м, а его скорость 2 м/с?

4. Дан параллелограмм $ABCD$. На стороне AD выбрана точка X таким образом, что $\angle XCD = \angle BCA$. Прямые CX и AB пересеклись в точке Y. Точка O — центр описанной окружности треугольника AXY. Докажите, что прямая CO перпендикулярна прямой BD.

5. Существуют ли такая последовательность действительных чисел $a_1, a_2, \ldots$ и такой непостоянный многочлен $P(x)$, что $a_m + a_n = P(mn)$ для любых натуральных m и n?

6. К простому циклу на n вершинах добавлено k рёбер, причем новых простых циклов на n вершинах не образовалось. Найдите наибольшее возможное значение k.

7. Сумма положительных a, b, c равна 3. Докажите, что $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} \geqslant ab + bc + ac$.

8. Точка B лежит на отрезке AC. Две дуги, построенные на AC и BC в одну полуплоскость, таковы, что сумма их градусных мер 360°. Произвольная окружность, проходящая через A и B, пересекает их в точках X и Y, отличных от A и B. Докажите, что прямая XY содержит некоторую фиксированную точку.

9. Найдите количество коэффициентов многочлена $(1+x)^{1988}$, не делящихся на 3.

10. Докажите, что не существует четырёх точек на плоскости, все попарные расстояния между которыми — нечётные числа.

11. На плоскости даны несколько прямых общего положения. На их точках пересечения рассматривается граф — каждая точка соединяется с соседними точками пересечения на одной с ней прямой. Докажите, что этот граф можно правильно покрасить в 3 цвета.

12. Дан клетчатый прямоугольник $m \times n$. За один ход можно перекрасить соседей по стороне любой клетки. Можно ли за нечётное число ходов перекрасить все клетки?

13. Докажите, что число $\frac{5^{125}-1}{5^{25}-1}$ — составное.

14. За столом сидит n детей, а вокруг стола по часовой стрелке ходит Дед Мороз (Новый Год, как никак:)) с конфетами. Он даёт конфету какому-то школьнику, следующего пропускает, следующему даёт конфету, затем пропускает двоих школьников, потом опять даёт конфету, потом пропускает троих, потом снова даёт конфету и так далее. Определите все n, для которых каждый школьник когда-нибудь получит хотя бы одну конфету.

15. В треугольнике ABC угол ABC равен 30°. Всегда ли найдётся такой равносторонний треугольник $A'B'C'$, что длина каждого из отрезков AA', BB', CC' не превосходит $\frac{AC}{3}$?

16. n-элементное подмножество множества $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ таково, что ни один его элемент не делится на другой. Найдите минимальное возможное число, которое может принадлежать такому подмножеству.

17. Дан многочлен $f(x)$ с целыми коэффициентами. Известно, что если для натуральных чисел a и b числа $f(a)$ и $f(b)$ взаимно просты, то a и b также взаимно просты. Докажите, что либо $f(0) = 0$, либо существует такое натуральное $d > 1$, что $f(n) \vdots d$ при всех натуральных n.