

Две точки A и B называются *сопряжёнными* относительно окружности $\omega(O, R)$, если $OA \cdot OB = R^2$.

1. (а) Множество всех точек, сопряжённых данной точке A — прямая a , перпендикулярная прямой OA . Эта прямая называется *полярной* точки A . Точка A называется *полюсом* прямой a .
(б) Докажите, что у любой прямой, не проходящей через O есть полюс, и только один.
2. Докажите, что
 - (а) Если точка A лежит вне окружности, то её полярная содержит точки касания двух касательных, проведённых к ω через точку A .
 - (б) Если точка B лежит внутри окружности, то её полярная не пересекает окружность.
 - (в) Если точка C лежит на окружности, то её полярная касается окружности и проходит через C .
3. *Свойство взаимности.* Если точка A лежит на полярной точки B , то точка B лежит на полярной точки A .
4. Даны окружность ω и прямая l , не имеющие общих точек. Из точки P , движущейся по прямой l проводятся касательные PA и PB к ω . Докажите, что все хорды AB имеют общую точку.
5. Через точку P проводятся всевозможные секущие данной окружности S . Найдите геометрическое место точек пересечения касательных к окружности S , проведённых в двух точках пересечения окружности с секущей.
6. Окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B , причем центр O окружности ω_1 лежит на ω_2 . Прямая, проходящая через точку O , пересекает отрезок AB в точке P , а окружность ω_2 в точке C . Докажите, что точка P лежит на полярной точки C относительно окружности ω_1 .
7. В треугольнике ABC проведены высоты AA_1 и BB_1 , пересекающиеся в точке H . Прямая A_1B_1 пересекает прямую AB в точке X . Докажите, что прямая, перпендикулярная прямой AB и проходящая через H делит AB пополам.
8. (а) Дана окружность ω и точка P вне неё. Из P проведены касательные PA и PB и две секущие, пересекающие окружность в точках X_1, X_2 и Y_1, Y_2 соответственно. Докажите, что точка пересечения X_1Y_1 и X_2Y_2 лежит на прямой AB .
(б) Через точку P проводятся всевозможные пары секущих AB и CD окружности S (A, B, C, D — точки пересечения с окружностью). Найдите геометрическое место точек пересечения прямых AC и BD .
(в) Точка пересечения диагоналей вписанного четырёхугольника принадлежит полярной точки пересечения его противоположных сторон.
(г) Дана точка A и окружность ω . Постройте касательную к ω , проходящую через A , одной линейкой.
9. Дан тупоугольный треугольник. Докажите, что существует единственная окружность, относительно которой он является *автополярным* (его вершины являются полярными прямыми, содержащими противоположные стороны). Постройте эту окружность.
10. Докажите, что диаметрально противоположные точки одной окружности только тогда сопряжены относительно другой, когда эти окружности ортогональны.
11. Точка M — середина стороны AB треугольника ABC , H — его ортоцентр. Докажите, что

$$4 \cdot MC \cdot MH = AB^2.$$