9 класс	Аффинные преобразования	22 мая 2014

Отображение плоскости в себя, переводящее прямые в прямые, называется *аффинным преобразованием плоскости.*

1. Пусть f — аффинное преобразование.
   (a) Докажите, что f переводит параллельные прямые в параллельные.
   (b) Докажите, что если $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, то $\overrightarrow{f(A)f(B)} = \overrightarrow{f(C)f(D)}$. Тем самым можно индуцировать наше отображение на вектора.

2. Докажите, что если f — аффинное преобразование, то f линейно
   (a) $f(\vec{0}) = \vec{0}$;
   (b) $f(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = f(\mathbf{a}) + f(\mathbf{b})$;
   (c) $f(k\mathbf{a}) = kf(\mathbf{a})$

3. Докажите, что аффинное преобразование сохраняет отношения длин трезков на прямой.

4. (a) Даны точки O и O', а также пары неколлинеарных векторов $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ и $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2$. Докажите, что существует единственное аффинное преобразование, переводящее O в O', $\mathbf{e}_1$ в $\mathbf{e}'_1$, $\mathbf{e}_2$ в $\mathbf{e}'_2$.
   (b) Докажите, что для любых двух невырожденных треугольников ABC и $A'B'C'$ существует единственное аффинное преобразование, переводящее A в A', B в B', а C в C'.

5. Докажите, что всякий четырёхугольник аффинным преобразованием можно перевести в четырёхугольник с двумя прямыми углами.

6. Докажите, что любое аффинное преобразование можно представить в виде композиции двух растяжений и аффинного преобразования, переводящего любой треугольник в подобный ему треугольник.

7. Дан шестиугольник, у которого все три пары противоположных сторон равны и параллельны. Докажите, что афинным преобразованием его можно перевести в правильный шестиугольник.

8. Докажите, что пятиугольник можно перевести в правильный тогда и только тогда, когда у него каждая диагональ параллельна одной из сторон.

9. Докажите, что если M' и N' — образы многоугольников M и N при аффинном преобразовании, то отношение площадей M' и N' равно отношению площадей M и N.