| 9 класс | Магия синусов | 14 апреля 2014 |
|---|---|---|

**Теорема синусов.** В треугольнике $ABC$ $\angle A = \alpha, \angle B = \beta, \angle C = \gamma$, $R$ – радиус описанной окружности. Тогда $BC = 2R\sin\alpha, AC = 2R\sin\beta, AB = 2R\sin\gamma$.

**Полезные формулы.**
$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha, \quad \cos(-\alpha) = \cos\alpha, \quad \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1;$
$\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \cos\alpha, \quad \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \sin\alpha, \quad \sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha, \quad \cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha;$
$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta, \quad \cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta;$
$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha, \quad \cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1;$
$\sin\alpha \pm \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha\pm\beta}{2}\cos\frac{\alpha\mp\beta}{2}, \quad \cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}, \quad \cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.$

**Соглашение.** Геометрические решения не принимаются. Только счёт в синусах, только хардкор.

**1.** $A_1$ и $A_2$ – основания биссектрис внутреннего и внешнего угла $\angle A$ неравнобедренного треугольника $ABC$. Докажите, что $\frac{BA_1}{A_1C} = \frac{BA_2}{A_2C} = \frac{BA}{AC}$.

**2.** В треугольнике $ABC$ провели высоты $AA_1, BB_1, CC_1$, пересекающиеся в точке $H$, а также биссектрисы $AA_2, BB_2, CC_2$, пересекающиеся в точке $I$. $\angle A = \alpha, \angle B = \beta, \angle C = \gamma$, $R$ – радиус описанной окружности.

**а)** Найдите $AA_1, BB_1, CC_1, AB_1, AC_1, BA_1, BC_1, CA_1, CB_1, AH, BH, CH, HA_1, HB_1, HC_1$.

**б)** Найдите $AA_2, BB_2, CC_2, AB_2, AC_2, BA_2, BC_2, CA_2, CB_2, AI, BI, CI, IA_2, IB_2, IC_2, r$.

**3. Теорема Чевы в виде синусов.** Точки $A_1$, $B_1$, $C_1$ лежат на сторонах $BC$, $AC$, $AB$ треугольника $ABC$. Докажите, что прямые $AA_1$, $BB_1$ и $CC_1$ пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда

$$\frac{\sin\angle CAA_1}{\sin\angle BAA_1} \cdot \frac{\sin\angle ABB_1}{\sin\angle CBB_1} \cdot \frac{\sin\angle BCC_1}{\sin\angle ACC_1} = 1\ .$$

**4.** Дан равносторонний треугольник $ABC$ и внутри него произвольная точка $X$. Точки $B_1$, $A_1$ и $C_1$ симметричны точке $X$ относительно сторон $AC$, $BC$ и $AB$ соответственно. Докажите, что прямые $AA_1$, $BB_1$ и $CC_1$ пересекаются в одной точке.

**5.** Точки $P$ и $Q$ – основания биссектрис внутреннего и внешнего угла $\angle A$ треугольника $ABC$ соответственно. $M$ – середина $AB$. Прямые $PM$ и $AC$ пересекаются в точке $R$. Докажите, что $AR = QR$.

**6.** На сторонах $AB, BC, CA$ треугольника $ABC$ выбраны $C'$, $A'$, $B'$ соответственно. Оказалось, что центры вписанных окружностей треугольников $ABC$ и $A'B'C'$ совпадают, а радиус вписанной окружности треугольника $A'B'C'$ вдвое меньше, чем радиус вписанной окружности треугольника $ABC$. Докажите, что треугольник $ABC$ — правильный.

**7.** Точка $K$ лежит на основании $BC$ равнобедренного треугольника $ABC$. Оказалось, что радиус вписанной окружности треугольника $ABK$ равен радиусу вневписанной окружности треугольника $ACK$, касающейся $CK$, и равен $r$. Докажите, что $r = h/4$, где $h$ – высота, опущенная из $B$ на $AC$.

**8.** Прямая $l$, проходящая через ортоцентр $H$ остроугольного треугольника $ABC$, пересекает стороны $AC$ и $BC$ в точках $D$ и $E$ соответственно. Прямая, проходящая через $H$ перпендикулярно $l$, пересекает сторону $AB$ треугольника в точке $F$. Докажите, что $DH/HE = AF/FB$.

**9.** Пусть $M$ — внутренняя точка треугольника $ABC$. Докажите, что хотя бы один из углов $\angle MAB$, $\angle MBC$, $\angle MCA$ не превосходит $30°$.