Комбинаторный разнобой

1. В ячейки куба $10 \times 10 \times 10$ поставлены числа $1, 2, \ldots, 1000$. Из одного углового кубика в противоположный угловой отправляются два червяка. Каждый из них может проползать в соседний по грани кубик, при этом первый может проползать, если число в соседнем кубике отличается на 8, второй — если отличается на 9. Существует ли такая расстановка чисел, что оба червяка смогут добраться до противоположного углового кубика?

2. В языке жителей Банановой Республики количество слов превышает количество букв в их алфавите. Докажите, что найдётся такое натуральное k, для которого можно выбрать k различных слов, в записи которых используется ровно k различных букв.

3. На вечеринку пришли 100 человек. Затем те, у кого не было знакомых среди пришедших, ушли. Затем те, у кого был ровно 1 знакомый среди оставшихся, тоже ушли. Затем аналогично поступали те, у кого было ровно $2, 3, 4, \ldots, 99$ знакомых среди оставшихся к моменту их ухода. Какое наибольшее число людей могло остаться в конце?

4. В языке племени АУ две буквы — «а» и «у». Некоторые последовательности этих букв являются словами, причём в каждом слове не больше 13 букв. Известно, что если написать подряд любые два слова, то полученная последовательность букв не будет словом. Какое наибольшее количество слов возможно в таком языке?

5. Два игрока по очереди выписывают на доске в ряд слева направо произвольные цифры. Проигрывает игрок, после хода которого одна или несколько цифр, записанных подряд, образуют число, делящееся на 11. Кто из игроков победит при правильной игре?

6. В наборе из 17 внешне одинаковых монет две фальшивых, отличающихся от остальных по весу. Известно, что суммарный вес двух фальшивых монет вдвое больше веса настоящей. Всегда ли можно определить обе фальшивых монеты, совершив 5 взвешиваний на чашечных весах без гирь? Определять, какая из фальшивых монет тяжелее, не требуется.

7. В некотором государстве 2014 городов, соединённых дорогами так, что из любого города можно было добраться до любого другого. Известно, что запретив проезд по любой из дорог, по-прежнему из любого города можно было добраться до любого другого. Министр транспорта и министр внутренних дел по очереди вводят на дорогах пока есть возможность одностороннее движение (на одной дороге за ход), причем министр, после хода которого из какого-либо города стало невозможно добраться до какого-либо другого, немедленно уходит в отставку. Первым ходит министр транспорта. Может ли кто-либо из министров добиться отставки другого независимо от его игры?

8. В n кучах лежат камни. Каким-то образом они переложены в $n+k$ куч, где $k>0$. Докажите, что хотя бы **а)** k; **б)** $k+1$ камней оказались в кучах меньшего размера.