

1. Доказать, что если $a > b > 0$ и n — натуральное число, большее 1, то имеет место неравенство

$$\sqrt[n]{a-b} > \sqrt[n]{a} - \sqrt[n]{b}.$$

2. Доказать, что если положительные числа a, b, c такие, что $a + b > c$, $a + c > b$, $b + c > a$, то имеет место неравенство

$$(a^2 + b^2 + c^2)(a + b + c) > 2(a^3 + b^3 + c^3).$$

3. Доказать, что если $a > 0, b > 0, c > 0$, $a < b + c$, $b < a + c$, $c < a + b$, то имеет место неравенство $a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + bc + ca)$.

4. Доказать неравенство $2(a^4 + b^4) + 19 > 12ab$ при $a \geq 0, b \geq 0$.

5. Доказать неравенство $3a^3 + 7b^3 \geq 9ab^2$ при $a \geq 0, b \geq 0$.

6. Доказать, что если $a > 0, b > 0, c > 0$, то имеет место неравенство

$$\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} \geq a + b + c.$$

7. Доказать неравенство

$$\frac{2x^2 + 1}{\sqrt{4x^2 + 1}} \geq 1.$$

8. Доказать неравенство

$$a(1 + b) + b(1 + c) + c(1 + a) \geq 6\sqrt{abc},$$

где $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0$.

9. Доказать неравенство $a^2 + b^2 + c^2 \geq \sqrt{abc}(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})$, где $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0$.

10. Доказать неравенство $6a + 4b + 5c \geq 5\sqrt{ab} + 7\sqrt{ac} + 3\sqrt{bc}$, где $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0$.

11. Доказать неравенство $n(n + 1)a + 2n \geq 4\sqrt{a}(\sqrt{1} + \sqrt{2} + \dots + \sqrt{n})$, где $a \geq 0$, n — целое неотрицательное число.

12. Доказать неравенство $n\sqrt{a} + \sqrt{b}(\sqrt{1} + \sqrt{2} + \dots + \sqrt{n}) \geq 2\sqrt[4]{ab}(\sqrt[4]{1} + \sqrt[4]{2} + \dots + \sqrt[4]{n})$, где $a \geq 0, b \geq 0$, n — натуральное.

13. Доказать неравенство

$$(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})(a + b + c) \geq 9\sqrt{abc},$$

где $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0$.

14. Доказать неравенство

$$\sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{bc} + \sqrt[3]{ca} - 1 \leq \frac{2}{3}(a + b + c),$$

где $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0$.