

1. (а) Точки A, B и C лежат в вершинах правильного треугольника, вписанного в окружность O . Произвольная точка M , лежащая на окружности O , соединяется отрезками с точками A, B и C . Докажите, что один из этих отрезков равен сумме двух других.
(б) Точки A, B и C лежат в вершинах правильного треугольника, вписанного в окружность O . Проводится окружность, касающаяся данной окружности O , и к этой второй окружности из каждой точки A, B и C проводится касательная. Докажите, что длина одной из этих касательных равна сумме длин двух других.
(с) Три равные окружности, центры которых A, B и C образуют правильный треугольник, касаются четвертой окружности O . Из произвольной точки N окружности O проведено по касательной к каждой из трех равных окружностей. Докажите, что длина одной из этих касательных равна сумме длин двух других касательных.
2. Показать, что две точки M и M' , являющиеся отражениями друг друга в данном круге, делят диаметр PQ круга, на котором и на продолжении которого они лежат, внутренним и внешним образом в одном и том же отношении. Найдите двойное отношение $(MM'PQ)$.
3. (а) Докажите, что середины четырёх общих касательных к двум непересекающимся кругам лежат на одной прямой.
(б) Через две из точек касания общих внешних касательных с двумя окружностями проведена прямая. Докажите, что окружности высекают на этой прямой равные хорды.
4. Дана окружность S и две точки A и B на ней. Проводятся всевозможные пары окружностей S_1, S_2 , касающихся S в точках A и B и
 - (а) касающихся между собой;
 - (б) перпендикулярных друг к другу.

Найдите геометрическое место точек касания (соответственно точек пересечения) S_1 и S_2

5. Даны две неконцентрические окружности S_1 и S_2 . Найдите геометрическое место центров окружностей, пересекающих обе эти окружности под прямым углом.
6. Три окружности попарно пересекаются в точках A_1 и A_2, B_1 и B_2, C_1 и C_2 . Докажите, что

$$A_1B_2 \cdot B_1C_2 \cdot C_1A_2 = A_2B_1 \cdot B_2C_1 \cdot C_2A_1.$$