9 класс — **Инверсия 2** — 13 марта 2014

1. Угол между двумя окружностями (или окружностью и прямой, или двумя прямыми) сохраняется при инверсии.

2. (a) Если A, B и O — точки, не лежащие на одной прямой, A', B' — образы A и B относительно O, а p и p' — высоты, проведенные из O к отрезкам AB и $A'B'$, то
$$\frac{AB}{p} = \frac{A'B'}{p'}.$$
   (b) Если из какой-либо точки S окружности опустить перпендикуляры на стороны вписанного многоугольника $ABCD \dots K$, то сумма отношений сторон многоугольника к соответствующим перпендикулярам равна нулю.

3. Если какую-либо точку S окружности соединить с вершинами вписанного многоугольника $ABC \dots K$, то
$$\frac{AB}{SA \cdot SB} + \frac{BC}{SB \cdot SC} + \frac{CD}{SC \cdot SD} + \dots + \frac{KA}{SK \cdot SA} = 0$$

4. **Теорема Птолемея (II).** Произведение диагоналей четырехугольника, не вписывающегося в круг, меньше суммы произведений противоположных сторон.

5. Если четыре точки окружности A, B, C, D преобразуются через инверсию в точки A', B', C', D' на одной прямой, то
$$\frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB} = \frac{C'A'}{C'B'} : \frac{D'A'}{D'B'}.$$

6. Все окружности, проходящие через данную точку A и перпендикулярные к данной окружности Σ (не проходящей через A), проходят одновременно через некоторую точку A', отличную от A.

7. Пусть A, B, C и D — четыре произвольные точки плоскости, не лежащие на одной прямой или на одной окружности. Докажите, что угол между окружностями, описанными вокруг треугольников ABC и ABD, равен углу между окружностями, описанными вокруг треугольников CDA и CDB.

8. **Теорема Паппа.** Пусть A и B — это две соприкасающиеся окружности, вписанные в окружности O так, что центры их A, B и O находятся на одной прямой. Если $C_1, C_2, C_3, \dots, C_n, \dots$ — окружности, соприкасающиеся между собой и касающиеся окружностей A, B, O, то перпендикуляр из центра C_n на прямую AB равен n раз взятому диаметру окружности C_n.

9. Докажите, что если каждая из четырёх окружностей S_1, S_2, S_3 и S_4 касается двух соседних, то четыре точки касания лежат на одной окружности Σ.