

Обозначим через d расстояние от точки M до центра O окружности радиуса r . Если прямая, проходящая через M , пересекается с окружностью в A и B , то, независимо от положения этой прямой произведете $MA \cdot MB = d^2 - r^2$ называется *степенью точки M относительно рассматриваемой окружности*.

Центральная точка — точка на линии центров двух окружностей, степени которой относительно этих окружностей равны.

Множество точек, степени которых относительно данных двух окружностей равны, называется *радикальной осью*.

- 2. (a) Если точка M находится вне окружности, то её степень положительна и равна квадрату касательной, проведённой к окружности из точки M ;
(b) Иначе её степень отрицательна и по абсолютной величине равна квадрату половины хорды окружности, проходящей через M .
- 1. Найдите радикальную ось (a) двух окружностей; (b) точки и окружности; (c) прямой и окружности; (d) точки и прямой.
0. (a) Общая касательная двух окружностей делится пополам радикальной осью;
(b) радикальная ось двух пересекающихся окружностей проходит через точки их пересечения;
(c) радикальная ось двух касающихся окружностей есть общая касательная к ним в точке соприкосновения;
(d) радикальная ось двух окружностей, не имеющих общих точек, не пересекается ни с одной из них.
1. Разность квадратов касательных к двум окружностям, проведённым из какой-либо точки P , равна удвоенному произведению расстояний между их центрами на расстояние от точки P до радикальной оси.
2. Если линия центров O_1O_2 двух окружностей, одна из которой проходит через центр другой, пересекается с первой в точке P , то радикальная ось этих окружностей совпадает с полярной точки P относительно второй окружности.
3. (a) **Теорема Монжа.** Радикальные оси трех окружностей, центры которых не лежат на одной прямой, пересекаются в одной точке, *радикальном центре*.
(b) Циркулем и линейкой постройте радикальную ось двух непересекающихся окружностей.
4. Общий радикальный центр окружностей, имеющих диаметрами стороны и медианы треугольника совпадает с его ортоцентром.
5. Поляры точек некоторой прямой относительно двух окружностей пересекаются на этой прямой тогда и только тогда, когда эта прямая — радикальная ось этих окружностей.
6. Четырёхугольник $ABCD$ без параллельных сторон вписан в окружность. Для каждой пары касающихся окружностей, одна из которых имеет хорду AB , а другая — хорду CD , отметим их точку касания X . Докажите, что все такие точки X лежат на одной окружности.
7. Дана окружность и точка P внутри неё, отличная от центра. Рассматриваются пары окружностей, касающиеся данной изнутри и друг друга в точке P . Найдите геометрическое место точек пересечения общих внешних касательных к этим окружностям.