9 класс | Цветные конструкции | 3 марта 2014

1. Каждая целочисленная точка плоскости окрашена в один из трёх цветов, причём все три цвета присутствуют. Докажите, что найдётся прямоугольный треугольник с вершинами трёх разных цветов.

2. В кабинете президента стоят 2014 телефонов, любые два из которых соединены проводом одного из четырёх цветов. Известно, что провода всех четырёх цветов присутствуют. Всегда ли можно выбрать несколько телефонов так, чтобы среди соединяющих их проводов встречались провода ровно трёх цветов?

3. Неугловая клетка доски 8×8 покрашена в чёрный цвет, а все остальные – в белый. За одну операцию можно перекрасить любую горизонталь, вертикаль или диагональ (не обязательно главную). Можно ли за несколько операций сделать доску белой?

4. На плоскости отмечено 6 красных, 6 синих и 6 зелёных точек, причём никакие 3 из отмеченных точек не лежат на одной прямой. Докажите, что сумма площадей треугольников с вершинами одного цвета составляет не более четверти суммы площадей всех треугольников с отмеченными вершинами.

5. 6 вершин правильного 21-угольника покрашены в красный цвет, и ещё 7 — в синий. Докажите, что найдутся красный и синий треугольники, равные друг другу.

6. Числа от 1 до 1000000 покрашены в два цвета — чёрный и белый. За ход разрешается выбрать любое число от 1 до 1000000 и перекрасить его и все числа, не взаимно простые с ним, в противоположный цвет. Вначале все числа были чёрными. Можно ли за несколько ходов добиться того, что все числа станут белыми?

7. На плоскости даны 6 точек, причём никакие 3 из них не лежат на одной прямой, и все попарные расстояния между ними различны. В каждом из 20 треугольников, образованном некоторыми тремя из этих шести точек, наибольшая сторона покрашена в красный цвет. Докажите, что найдётся красный треугольник.

9 класс | Цветные конструкции | 3 марта 2014

1. Каждая целочисленная точка плоскости окрашена в один из трёх цветов, причём все три цвета присутствуют. Докажите, что найдётся прямоугольный треугольник с вершинами трёх разных цветов.

2. В кабинете президента стоят 2014 телефонов, любые два из которых соединены проводом одного из четырёх цветов. Известно, что провода всех четырёх цветов присутствуют. Всегда ли можно выбрать несколько телефонов так, чтобы среди соединяющих их проводов встречались провода ровно трёх цветов?

3. Неугловая клетка доски 8×8 покрашена в чёрный цвет, а все остальные – в белый. За одну операцию можно перекрасить любую горизонталь, вертикаль или диагональ (не обязательно главную). Можно ли за несколько операций сделать доску белой?

4. На плоскости отмечено 6 красных, 6 синих и 6 зелёных точек, причём никакие 3 из отмеченных точек не лежат на одной прямой. Докажите, что сумма площадей треугольников с вершинами одного цвета составляет не более четверти суммы площадей всех треугольников с отмеченными вершинами.

5. 6 вершин правильного 21-угольника покрашены в красный цвет, и ещё 7 — в синий. Докажите, что найдутся красный и синий треугольники, равные друг другу.

6. Числа от 1 до 1000000 покрашены в два цвета — чёрный и белый. За ход разрешается выбрать любое число от 1 до 1000000 и перекрасить его и все числа, не взаимно простые с ним, в противоположный цвет. Вначале все числа были чёрными. Можно ли за несколько ходов добиться того, что все числа станут белыми?

7. На плоскости даны 6 точек, причём никакие 3 из них не лежат на одной прямой, и все попарные расстояния между ними различны. В каждом из 20 треугольников, образованном некоторыми тремя из этих шести точек, наибольшая сторона покрашена в красный цвет. Докажите, что найдётся красный треугольник.