9 класс | Разнобой | 24 февраля 2014

1. Натуральные числа x, y таковы, что НОД$(x^7, y^4)\cdot$НОД$(x^8, y^5) = xy$. Докажите, что xy – точный куб.

2. Во вписанном четырехугольнике $ABCD$ O — точка пересечения диагоналей. Точка O_1 симметрична O относительно AD и лежит на описанной окружности. Докажите, что O_1O — биссектриса угла BO_1C.

3. Функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ непрерывна. Для каждого $x \in \mathbb{R}$ имеет место равенство $f(x) \cdot f(f(x)) = 1$. Известно, что $f(1000) = 999$. Найдите $f(500)$.

4. Два игрока по очереди проводят диагонали в правильном $(2n + 1)$ – угольнике $(n > 1)$. Разрешается проводить диагональ, если она пересекается (по внутренним точкам) с чётным числом ранее проведённых диагоналей (и не была проведена раньше). Проигрывает игрок, который не может сделать очередной ход. Кто выигрывает при правильной игре?

5. На доске написан квадратный трёхчлен $p(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$. Вместо трёхчлена $p(x)$ записывают трёхчлен $\frac{p(x-1)+p(x+1)}{2}$, а исходный трёхчлен стирают. Докажите, что через несколько таких замен получится трёхчлен, не имеющий корней.

6. Натуральный ряд чисел разбит на две бесконечные части так, что любая тройка чисел из какой-либо части дает в сумме число, принадлежащее той же части. Докажите, что нечётные числа принадлежат одной части, а чётные — другой.

7. Найдите все пары натуральных m, n, такие, что $n^5 + n^4 = 7^m - 1$.

8. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1 и BB_1. Биссектриса угла ACB пересекает эти высоты в точках F и L. Докажите, что середина отрезка FL равноудалена от точек A_1 и B_1.

9 класс | Разнобой | 24 февраля 2014

1. Натуральные числа x, y таковы, что НОД$(x^7, y^4)\cdot$НОД$(x^8, y^5) = xy$. Докажите, что xy – точный куб.

2. Во вписанном четырехугольнике $ABCD$ O — точка пересечения диагоналей. Точка O_1 симметрична O относительно AD и лежит на описанной окружности. Докажите, что O_1O — биссектриса угла BO_1C.

3. Функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ непрерывна. Для каждого $x \in \mathbb{R}$ имеет место равенство $f(x) \cdot f(f(x)) = 1$. Известно, что $f(1000) = 999$. Найдите $f(500)$.

4. Два игрока по очереди проводят диагонали в правильном $(2n + 1)$ – угольнике $(n > 1)$. Разрешается проводить диагональ, если она пересекается (по внутренним точкам) с чётным числом ранее проведённых диагоналей (и не была проведена раньше). Проигрывает игрок, который не может сделать очередной ход. Кто выигрывает при правильной игре?

5. На доске написан квадратный трёхчлен $p(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$. Вместо трёхчлена $p(x)$ записывают трёхчлен $\frac{p(x-1)+p(x+1)}{2}$, а исходный трёхчлен стирают. Докажите, что через несколько таких замен получится трёхчлен, не имеющий корней.

6. Натуральный ряд чисел разбит на две бесконечные части так, что любая тройка чисел из какой-либо части дает в сумме число, принадлежащее той же части. Докажите, что нечётные числа принадлежат одной части, а чётные — другой.

7. Найдите все пары натуральных m, n, такие, что $n^5 + n^4 = 7^m - 1$.

8. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1 и BB_1. Биссектриса угла ACB пересекает эти высоты в точках F и L. Докажите, что середина отрезка FL равноудалена от точек A_1 и B_1.