9 класс	Поляры 2	20 февраля 2014

Двойным отношением четырех точек A, B, C, D, (AB, CD), называется число $\frac{c-a}{c-b} : \frac{d-a}{d-b}$, где a, b, c, d — координаты точек A, B, C, D соответственно.

Пусть прямая l не прходит через точку O. Двойным отношением (a, b, c, d) четверки прямых a, b, c, d проходящих через одну точку O, называют двойное отношение (A, B, C, D) точек A, B, C, D — точек пересечения прямых a, b, c, d и прямой l.

0. $(a, b, c, d) = \pm\frac{\sin(a,c)}{\sin(b,c)} : \frac{\sin(a,d)}{\sin(b,d)}$, причем если один из углов, образованных прямыми a и b, не пересекается ни с одной из прямых c или d, то $(abcd) > 0$; в противном случае $(abcd) < 0$.

12. Двойное отношение четырех точек A, B, C, D, лежащих на прямой l, равно двойному отношению, которое составленно их полярами относительно одной оркужности.

13. Поляра точки пересечения двух противоположных сторон вписанного четырехугольника проходит через точки пересечения его диагоналей и двух других противоположных сторон.

14. **Теорема Ньютона.** Диагонали описанного четырехугольника и хорды, соединяющие точки касания противоположных сторон, пересекаются в одной точке.

15. **Теорема Сальмона.** Расстояния от двух точек до центра круга пропорциональны расстояниям от каждой из них до поляры другой.

16. (a) **Теорема Паппа.** Произведение расстояний от какой-либо точки окружности до двух противоположных сторон вписанного четырехугольника равно произведению расстояний от той же точки до двух других сторон его.

    (b) Произведение расстояний от какой-либо точки окружности до двух сторон вписанного треугольника равно произведению расстояний от той же точки до третьей стороны треугольника и до касательной к кругу, проеденной через противоположную вершину.

    (c) Произведение расстояний от какой-либо точки окружности до двух касательных к ней равно квадрату расстояния от той же точки до хорды, соединяющей точки касаний.

17. **Теорема Шаля.** Произведения расстояний от произвольной касательной к окружности до противоположных вершин описанного четырехугольника пропорциональны произведению расстояний от тех же вершин до центра круга.