9 класс	Дама с собачкой	17 февраля 2014

1. Основная теорема алгебры. Любой многочлен с комплексными коэффициентами (в том числе, и с действительными), отличный от константы, имеет комплексный корень.

Очевидно, достаточно доказать теорему для многочлена со старшим коэффициентом 1. Пусть тогда наш многочлен имеет вид $P(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + a_{n-2}z^{n-2} + \ldots + a_1 z + a_0$. Если $a_0 = 0$, то утверждение очевидно – подойдёт корень 0. Поэтому дальше будем считать, что $a_0 \neq 0$.

Определения. Точку z^n на комплексной плоскости назовём *Дамой*, а точку $P(z)$ – *Собачкой*. Число R определим как $R = |a_{n-1}| + |a_{n-2}| + \ldots + |a_1| + |a_0| + 1$. Дама держит Собачку на поводке, причём *длиной поводка* назовём следующее выражение: $L = R^n$. Точка O – центр комплексной плоскости.

а) Число z начинает свой путь по комплексной плоскости в точке R, проходит один раз по окружности радиуса R против часовой стрелки и возвращается в ту же точку. Тогда Дама движется по окружности радиуса R^n, но обходит её n раз.

б) Докажите, что расстояние между Дамой и Собачкой $|P(z) - z^n|$ не превосходит длины поводка.

Отсюда следует, что на своём пути Собачка, как и Дама, n раз обходит вокруг точки O.

Начнём стягивать радиус начальной окружности от R до нуля. Радиус окружности, по которой гуляет Дама, уменьшается, но она по-прежнему будет проходить n раз вокруг точки O. Траектория движения Собачки меняется непрерывно, и при радиусе, близком к нулю, она близка к точке a_0. Тогда существует малое значение радиуса, при котором Собачка ни разу не пройдёт вокруг точки O.

Итак, в процессе стягивания число обходов траектории Собачки вокруг точки O (это, очевидно, некоторая целозначная функция от радиуса) уменьшается от n до нуля.

в) Докажите, что при некотором значении радиуса Собачка будет вынуждена пройти через O.

Вспомнив теорему Безу, получаем, что у любого многочлена n-й степени ровно n комплексных корней (с учётом кратности).

Упражнение. Комплексное число z выходит из точки 1, обходит окружность радиуса 1 с центром в O против часовой стрелки и возвращается в ту же точку 1. По какой линии движется **а)** $\frac{1}{z}$; **б)** $z + \frac{1}{z}$?

2. Пусть $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ – многочлен с действительными коэффициентами.

а) Докажите, что если $P(z) = 0$, то и $P(\overline{z}) = 0$.

б) Докажите, что $P(x)$ представляется в виде произведения многочленов с действительными коэффициентами, каждый из которых имеет степень не выше двух.

3. а) Разложите на множители с действительными коэффициентами (все они должны быть не выше второй степени) многочлен $x^{2n} - 1$.

б) Докажите, что $\sin\dfrac{\pi}{2n} \cdot \sin\dfrac{2\pi}{2n} \cdot \ldots \cdot \sin\dfrac{(n-1)\pi}{2n} = \dfrac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}$.

в) Докажите, что $\cos\dfrac{\pi}{2n} \cdot \cos\dfrac{2\pi}{2n} \cdot \ldots \cdot \cos\dfrac{(n-1)\pi}{2n} = \dfrac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}$.