9 класс | Комплексные числа-3 | 30 января 2014

Соглашение. Во всех задачах считаем, что у точки Z координата z, у A координата a, и т.д.

1. Точка C делит отрезок AB в отношении $p:q$ ($AC:BC=p:q$). Тогда $c=a\frac{q}{p+q}+b\frac{p}{p+q}$.

2. Выразите координаты **а)** точки пересечения медиан **б)** ортоцентра треугольника ABC, вписанного в единичную окружность, через координаты его вершин a, b и c.

3. Докажите, что квадрат расстояния между точками Z_1 и Z_2 равен $(z_1-z_2)(\overline{z_1}-\overline{z_2})$.

4. Докажите, что сумма квадратов медиан треугольника равна $3/4$ от суммы квадратов его сторон.

5. **а)** Докажите, что точки Z_1, Z_2 и Z_3 лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда действительным числом является $\dfrac{z_1-z_2}{z_2-z_3}$, то есть верно равенство $\dfrac{z_1-z_2}{z_2-z_3}=\dfrac{\overline{z_1}-\overline{z_2}}{\overline{z_2}-\overline{z_3}}$.

б) Докажите, что угол $\angle Z_1Z_2Z_3$ равен 90° тогда и только тогда, когда чисто мнимым числом является $\dfrac{z_1-z_2}{z_2-z_3}$, то есть верно равенство $\dfrac{z_1-z_2}{z_2-z_3}=-\dfrac{\overline{z_1}-\overline{z_2}}{\overline{z_2}-\overline{z_3}}$

в) Докажите, что уравнение $z+ab\overline{z}=a+b$ определяет прямую, содержащую хорду AB единичной окружности.

г) Найдите координаты основания высоты, опущенной из C на прямую AB (все точки лежат на единичной окружности).

6. На сторонах треугольника ABC во внешнюю сторону построили квадраты $ACKX$ и $ABNY$. Докажите, что медиана AM треугольника ABC перпендикулярна XY.

7. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность. Из A опускаются перпендикуляры на стороны, её не содержащие: BC и CD, и через их основания проводится прямая l_a. Аналогично определяются прямые l_b, l_c и l_d. Докажите, что все они пересекаются в одной точке.

8. Теорема Ньютона. Докажите, что в описанном четырёхугольнике середины диагоналей и центр вписанной окружности лежат на одной прямой.

9 класс | Комплексные числа-3 | 30 января 2014

Соглашение. Во всех задачах считаем, что у точки Z координата z, у A координата a, и т.д.

1. Точка C делит отрезок AB в отношении $p:q$ ($AC:BC=p:q$). Тогда $c=a\frac{q}{p+q}+b\frac{p}{p+q}$.

2. Выразите координаты **а)** точки пересечения медиан **б)** ортоцентра треугольника ABC, вписанного в единичную окружность, через координаты его вершин a, b и c.

3. Докажите, что квадрат расстояния между точками Z_1 и Z_2 равен $(z_1-z_2)(\overline{z_1}-\overline{z_2})$.

4. Докажите, что сумма квадратов медиан треугольника равна $3/4$ от суммы квадратов его сторон.

5. **а)** Докажите, что точки Z_1, Z_2 и Z_3 лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда действительным числом является $\dfrac{z_1-z_2}{z_2-z_3}$, то есть верно равенство $\dfrac{z_1-z_2}{z_2-z_3}=\dfrac{\overline{z_1}-\overline{z_2}}{\overline{z_2}-\overline{z_3}}$.

б) Докажите, что угол $\angle Z_1Z_2Z_3$ равен 90° тогда и только тогда, когда чисто мнимым числом является $\dfrac{z_1-z_2}{z_2-z_3}$, то есть верно равенство $\dfrac{z_1-z_2}{z_2-z_3}=-\dfrac{\overline{z_1}-\overline{z_2}}{\overline{z_2}-\overline{z_3}}$

в) Докажите, что уравнение $z+ab\overline{z}=a+b$ определяет прямую, содержащую хорду AB единичной окружности.

г) Найдите координаты основания высоты, опущенной из C на прямую AB (все точки лежат на единичной окружности).

6. На сторонах треугольника ABC во внешнюю сторону построили квадраты $ACKX$ и $ABNY$. Докажите, что медиана AM треугольника ABC перпендикулярна XY.

7. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность. Из A опускаются перпендикуляры на стороны, её не содержащие: BC и CD, и через их основания проводится прямая l_a. Аналогично определяются прямые l_b, l_c и l_d. Докажите, что все они пересекаются в одной точке.

8. Теорема Ньютона. Докажите, что в описанном четырёхугольнике середины диагоналей и центр вписанной окружности лежат на одной прямой.