9 класс	Комплексные числа-2	23 января 2014

1. Докажите, что для всякого комплексного числа $z \neq 0$ справедливо равенство $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, где $|z|$ и φ – соответственно модуль и аргумент числа z.

Определение. Запись $|z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ называется *тригонометрической формой* комплексного числа z.

2. Запишите комплексные числа в тригонометрической форме:

а) -3; **б)** i; **в)** $1 - i\sqrt{3}$; **г)** $\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$; **д)** $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$; **е)** $\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)$;

ё) $-3(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$; **з)** $\sqrt{5}\cos\frac{\pi}{\sqrt{5}} - i\sqrt{5}\sin\frac{\pi}{\sqrt{5}}$; **ж)** $\frac{\cos\varphi + i\sin\varphi}{\cos\varphi - i\sin\varphi}$.

3. Пусть $z_1 = |z_1|(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$; $z_2 = |z_2|(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$. Докажите, что:

а) $z_1 z_2 = |z_1||z_2|(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$;

б) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2))$.

4. Докажите, что множество всех комплексных чисел с модулем 1 замкнуто по умножению (то есть, произведение чисел с этим свойством тоже даёт число с таким свойством).

5. Вычислите выражения, используя тригонометрическую форму:

а) $(-i)i$; **б)** $\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3$; **в)** $\frac{\sqrt{3} + i}{1 - i}$; **г)** $\frac{\sqrt{3} + \sqrt{3}i}{i - \sqrt{3}}$.

6. Формула Муавра. Докажите, что если $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, то $z^n = |z|^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$.

7. Вычислите

а) $\frac{(1-i)^7(\sqrt{3}+i)^{10}}{(1+i)^{15}}$; **б)** $\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2014}$.

8. а) Покажите, что число $\cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n}$, где n – натуральное, k – целое, является одним из корней n-ой степени из единицы;

б) Докажите формулу, которая позволяет вычислить все корни n-ой степени из данного числа z: $\sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right)$ для всех $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$.

9. Найдите все значения корней:

а) $\sqrt{i}$; **б)** $\sqrt[4]{-1}$; **в)** $\sqrt{1-i}$; **г)** $\sqrt[8]{i\sqrt{3} - 1}$.

10. а) Докажите, что все корни n-ой степени из 1 образуют на комплексной плоскости правильный n-угольник, вписанный в тригонометрическую окружность;

б) Чему равно произведение всех корней n-ой степени из 1? А их сумма?

11. Пусть ε – примитивный корень n-й степени из единицы (то есть, n – наименьшее натуральное число такое, что $\varepsilon^n = 1$). Вычислите значение выражения $(1-\varepsilon)(1-\varepsilon^2)(1-\varepsilon^3)\ldots(1-\varepsilon^{n-1})$.