1. Даны натуральные числа M и N, большие 10, состоящие из одинакового количества цифр и такие, что $M = 3N$. Чтобы получить число M, надо в числе N к одной из цифр прибавить 2, а к каждой из остальных цифр прибавить по нечётной цифре. Какой цифрой могло оканчиваться число N? Найдите все возможные ответы.

2. Ненулевые числа a и b таковы, что уравнение $a(x-a)^2 + b(x-b)^2 = 0$ имеет единственное решение. Докажите, что $|a| = |b|$.

3. Окружность, вписанная в прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой AB, касается его сторон BC, AC, AB в точках A_1, B_1, C_1 соответственно. Пусть B_1H – высота треугольника $A_1B_1C_1$. Докажите, что точка H лежит на биссектрисе угла CAB.

4. Тридцать девочек – 13 в красных платьях и 17 в синих платьях – водили хоровод вокруг новогодней ёлки. Впоследствии каждую из них спросили, была ли её соседка справа в синем платье. Оказалось, что правильно ответили те и только те девочки, которые стояли между девочками в платьях одного цвета. Сколько девочек могли ответить утвердительно?

5. Можно ли при каком-то натуральном k разбить все натуральные числа от 1 до k на две группы и выписать числа в каждой группе подряд в некотором порядке так, чтобы получились два одинаковых числа?

6. Можно ли разбить клетчатую доску 12×12 на уголки из трёх клеток так, чтобы каждый горизонтальный и каждый вертикальный ряд клеток доски пересекал одно и то же количество уголков? (Ряд пересекает уголок, если содержит хотя бы одну его клетку.)

7. Серединный перпендикуляр к стороне AC остроугольного треугольника ABC пересекает прямые AB и BC в точках B_1 и B_2 соответственно, а серединный перпендикуляр к стороне AB пересекает прямые AC и BC в точках C_1 и C_2 соответственно. Окружности, описанные около треугольников BB_1B_2 и CC_1C_2, пересекаются в точках P и Q. Докажите, что центр окружности, описанной около треугольника ABC, лежит на прямой PQ.

8. По кругу выписаны 1000 чисел. Петя вычислил модули разностей соседних чисел, Вася – модули разностей чисел, стоящих через одно, а Толя – модули разностей чисел, стоящих через два. Известно, что любое Петино число больше любого Васиного хотя бы вдвое. Докажите, что любое Толино число не меньше любого Васиного.

9. В треугольнике ABC угол A равен 60°. Пусть BB_1 и CC_1 – биссектрисы этого треугольника. Докажите, что точка, симметричная вершине A относительно прямой B_1C_1, лежит на стороне BC.

10. В клетках доски 8×8 расставлены числа 1 и –1 (в каждой клетке – по одному числу). Рассмотрим всевозможные расположения Т-тетраминошки на доске (фигурку можно поворачивать, но её клетки не должны выходить за пределы доски). Назовём такое расположение *неудачным*, если сумма чисел, стоящих в четырёх клетках фигурки, не равна 0. Найдите наименьшее возможное число неудачных расположений.