| 9 класс | Комплексные числа | 16 января 2014 |
|---|---|---|

**Определения.** *Комплексными числами* называются числа вида $z = a + bi$, где $a$ и $b$ – действительные, а $i$ – так называемая *мнимая единица*, то есть число, квадрат которого равен –1. Множество всех комплексных чисел обозначается как $\mathbb{C}$.

Число $\overline{z} = a - bi$ называется *комплексно сопряжённым* к числу $z = a + bi$.

Координатная плоскость, каждой точке $Z$ с координатами $a$ и $b$ которой сопоставлено комплексное число $z$ по правилу: $Z(a; b) \to z = a + bi$, называется *комплексной плоскостью* ($Re\ z$ – абсцисса, а $Im\ z$ – ордината точки $Z$). Множество всех действительных чисел при этом изображается одной из осей координат, называемой *действительной* осью $Re\ z$, а множество всех чисто мнимых чисел, то есть чисел с нулевой действительной частью, изображается другой осью координат – *мнимой* осью $Im\ z$.

**1.** Пусть $z = a + bi, z' = a' + b'i$. Найдите $z + z'$, $z \cdot z'$, $z/z'$.

**2.** Проверьте равенства: $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$; $\overline{z \cdot z'} = \overline{z} \cdot \overline{z'}$; $\overline{z/z'} = \overline{z}/\overline{z'}$; $\overline{\overline{z}} = z$.

**3.** Докажите равенства: $z + \overline{z} = 2 \cdot Re\ z$; $z - \overline{z} = 2i \cdot Im\ z$; $z \cdot \overline{z} = |z|^2$.

**Замечание.** Эквивалентным образом комплексные числа можно отождествлять с векторами. Комплексное число $z = a + bi$ можно понимать как вектор $\overrightarrow{OZ}$, с началом в точке $O$ и с концом в точке $(a, b)$ на комплексной плоскости.

**Определения.** *Модулем* числа $z$ (обозначается $|z|$) называется длина вектора $\overrightarrow{OZ}$, а *аргументом* ненулевого числа $z$ (обозначается $\arg z$) – ориентированный угол между положительным направлением действительной оси и вектором $\overrightarrow{OZ}$. Для числа $z = 0$ аргумент не определён. Значения аргумента данного комплексного числа определяется неоднозначно, но все они отличаются на слагаемое $2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Обычно аргументом считают угол из промежутка $(-\pi, \pi]$.

**4. а)** Изобразите на комплексной плоскости числа $1$, $i$, $i^2$, $1+i$, $\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ . Найдите их модули и аргументы.

**б)** Модуль комплексного числа равен 2, а аргумент $-930°$. Найдите его действительную и мнимую части.

**5. а)** Числа $z_1$ и $z_2$ изображаются на комплексной плоскости точками $Z_1$ и $Z_2$ соответственно, а их сумма – точкой $Z$. Докажите, что вектор $\overrightarrow{OZ}$ равен сумме векторов $\overrightarrow{OZ_1}$ и $\overrightarrow{OZ_2}$.

**б)** Докажите *неравенство треугольника* $|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$;

**в)** Какое преобразование комплексной плоскости задаётся формулой $f(z) = z+z_0$, где $z_0$ – константа?

**6.** Изобразите на комплексной плоскости (мыслить нужно *геометрически*!) следующие множества:

**а)** $|z| = 1$;
**б)** $z \cdot \overline{z} = 2$;
**в)** $z = \overline{z}$;
**г)** $|z| + \arg z = 2 + i$;
**д)** $|z| = Re\ z$;
**е)** $arg(z - 2) = \pi$;
**ё)** $1 < |z - 1 + i| \leqslant 3$;
**ж)** $|z - i| = |z - 2i + 3|$;
**з)** $|z - i| > |z + 1|$.
**и)** $|z - i - 1| = 2|z + 2i - 1|$.

**7. а)** Докажите, что модуль произведения комплексных чисел равен произведению их модулей.

**б)** Докажите, что если каждое из двух натуральных чисел представляется в виде суммы двух квадратов целых чисел, то их произведение также представляется в виде суммы двух квадратов.