9 класс	Инверсия	13 января 2014

Определение. *Инверсией* относительно окружности ω с центром O радиуса R называется преобразование плоскости, переводящее каждую точку A, отличную от O, в такую точку A' на луче OA, что выполняется соотношение $OA{\cdot}OA' = R^2$. Окружность S называется *окружностью инверсии*. Центр инверсии (точка O) не имеет образа, и в него не переходит никакая точка плоскости. Число R называется *радиусом инверсии*.

-2. Найдите все неподвижные точки инверсии. Докажите, что если при инверсии точка A переходит в точку A', то точка A' переходит в точку A (точки A и A' называются *инверсными*).

-1. Пусть AM и AN – касательные к окружности S, проведённые из точки A, A' – середина MN. Докажите, что точки A и A' – инверсные относительно окружности S.

0. Пусть A и A', B и B' – пары инверсных точек. Докажите, что они лежат на одной окружности.

1. Докажите, что при инверсии:

а) прямая, проходящая через центр инверсии, переходит в себя;

б) прямая, не проходящая через центр инверсии, переходит в окружность проходящую через центр инверсии, причём касательная к этой окружности, проходящая через центр инверсии, параллельна исходной прямой.

в) окружность, не проходящая через центр инверсии, переходит в окружность, не проходящую через центр.

2. а) Пусть A и A', B и B' — пары инверсных точек относительно окружности радиуса R с центром в точке O. Докажите, что $A'B' = AB \cdot \dfrac{R^2}{OA \cdot OB}$ (формула изменения расстояния между точками при инверсии).

б) Теорема Птолемея. Докажите, что четырёхугольник является вписанным тогда и только тогда, когда сумма произведений противоположных сторон равна произведению его диагоналей.

3. Пусть инверсия с центром O переводит окружность S в окружность S'. Докажите, что точка O — центр гомотетии, переводящей S в S'.

4. Окружность S касается окружностей S_1 и S_2, имеющих различные радиусы, внешним образом в точках A и B. Докажите, что прямая AB проходит через центр гомотетии, переводящей S_1 в S_2.

5. В сегмент вписываются всевозможные пары касающихся окружностей. Для каждой пары окружностей через точку их касания проводится общая касательная.

а) Докажите, что все получившиеся прямые проходят через одну точку.

б) Найдите эту точку.

6. Точки A, B и C лежат на одной прямой, а точка P — вне этой прямой. Докажите, что центры описанных окружностей треугольников ABP, BCP, CAP и точка P лежат на одной окружности.