9 класс **Разнобой** 16 декабря 2013

1. Положительное число x таково, что $[x]\cdot\{x\}=100$. Чему может быть равно $[x^2]-[x]^2$?

2. На фестивале камерной музыки собралось 6 музыкантов. На каждом концерте часть музыкантов выступает, а остальные слушают их из зала. За какое наименьшее число концертов каждый из шести музыкантов сможет послушать (из зала) всех остальных?

3. Натуральные числа a,b,c,d таковы, что $ab=cd$. Докажите, что число $a+b+c+d$ — составное.

4. Действительные числа x,y,z таковы, что $x^2+y^2+z^2+2xyz=1$. Докажите, что существует треугольник с углами α,β,γ такой, что $x=cos\alpha$, $y=cos\beta$, $z=cos\gamma$.

5. Дан граф — несколько городов, соединённых дорогами так, что из каждого города выходит нечётное число дорог. Некоторые из городов раскрашены в красный цвет, а некоторые — в белый. В городе может произойти революция, если большинство его соседей раскрашено не в тот же цвет, что и он сам. Каждый день ровно в одном из городов происходит революция, и он меняет цвет на тот, в который раскрашено большинство его соседей. Доказать, что в конце концов революции прекратятся.

6. Вписанная окружность касается сторон AB и AC треугольника ABC в точках M и N. Пусть P — точка пересечения прямой MN и биссектрисы угла B. Докажите, что угол $\angle BPC$ — прямой.

7. На плоскости даны n точек. Двое по очереди проводят векторы с началом и концом в этих точках. Если в любой момент сумма векторов равна нулевому вектору, то выигрывает второй игрок, иначе выигрывает первый. Кто из игроков имеет выигрышную стратегию?

9 класс **Разнобой** 16 декабря 2013

1. Положительное число x таково, что $[x]\cdot\{x\}=100$. Чему может быть равно $[x^2]-[x]^2$?

2. На фестивале камерной музыки собралось 6 музыкантов. На каждом концерте часть музыкантов выступает, а остальные слушают их из зала. За какое наименьшее число концертов каждый из шести музыкантов сможет послушать (из зала) всех остальных?

3. Натуральные числа a,b,c,d таковы, что $ab=cd$. Докажите, что число $a+b+c+d$ — составное.

4. Действительные числа x,y,z таковы, что $x^2+y^2+z^2+2xyz=1$. Докажите, что существует треугольник с углами α,β,γ такой, что $x=cos\alpha$, $y=cos\beta$, $z=cos\gamma$.

5. Дан граф — несколько городов, соединённых дорогами так, что из каждого города выходит нечётное число дорог. Некоторые из городов раскрашены в красный цвет, а некоторые — в белый. В городе может произойти революция, если большинство его соседей раскрашено не в тот же цвет, что и он сам. Каждый день ровно в одном из городов происходит революция, и он меняет цвет на тот, в который раскрашено большинство его соседей. Доказать, что в конце концов революции прекратятся.

6. Вписанная окружность касается сторон AB и AC треугольника ABC в точках M и N. Пусть P — точка пересечения прямой MN и биссектрисы угла B. Докажите, что угол $\angle BPC$ — прямой.

7. На плоскости даны n точек. Двое по очереди проводят векторы с началом и концом в этих точках. Если в любой момент сумма векторов равна нулевому вектору, то выигрывает второй игрок, иначе выигрывает первый. Кто из игроков имеет выигрышную стратегию?