9 класс | **Неравенства** | 12 декабря 2013

1. Сумма квадратов пяти действительных чисел a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 равна 1. Докажите, что хотя бы одно из чисел $(a_i - a_j)^2$, где $i, j \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ и $i \neq j$, не превосходит 0,1 .

2. Докажите, что $\alpha a + \beta b + \gamma c \geqslant 1/2(\alpha b + \alpha c + \beta a + \beta c + \gamma a + \gamma b)$, где a, b, c — длины сторон треугольника, α, β и γ — величины соответствующих противоположных углов.

3. Для действительных чисел x и y докажите неравенство $x^4 + y^4 + 8 \geqslant 8xy$.

4. Сумма обратных величин положительных чисел $a_1, a_2, \ldots a_n$ равна 1. Докажите неравенство

$$\frac{a_1}{a_1^2 + a_2^2} + \frac{a_2}{a_2^2 + a_3^2} + \ldots + \frac{a_n}{a_n^2 + a_1^2} \leqslant \frac{1}{2}\,.$$

5. Даны положительные числа a, b, c. Докажите, что $abc(a+b)(b+c)(c+a) \leqslant (a^2+bc)(b^2+ca)(c^2+ab)$.

6. Пусть a, b, c — стороны треугольника. Докажите неравенство $\dfrac{a}{b+c-a} + \dfrac{b}{c+a-b} + \dfrac{c}{a+b-c} \geqslant 3.$

7. Докажите неравенство $a^2 + b^2 + c^2 + 2abc < 2$, где a, b, c — стороны треугольника с периметром 2.

8. Докажите, что для любых положительных a, b, c, не больших 1, справедливо неравенство:

$$\frac{a}{1+bc} + \frac{b}{1+ac} + \frac{c}{1+ab} \leqslant 2\,.$$

9 класс | **Неравенства** | 12 декабря 2013

1. Сумма квадратов пяти действительных чисел a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 равна 1. Докажите, что хотя бы одно из чисел $(a_i - a_j)^2$, где $i, j \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ и $i \neq j$, не превосходит 0,1 .

2. Докажите, что $\alpha a + \beta b + \gamma c \geqslant 1/2(\alpha b + \alpha c + \beta a + \beta c + \gamma a + \gamma b)$, где a, b, c — длины сторон треугольника, α, β и γ — величины соответствующих противоположных углов.

3. Для действительных чисел x и y докажите неравенство $x^4 + y^4 + 8 \geqslant 8xy$.

4. Сумма обратных величин положительных чисел $a_1, a_2, \ldots a_n$ равна 1. Докажите неравенство

$$\frac{a_1}{a_1^2 + a_2^2} + \frac{a_2}{a_2^2 + a_3^2} + \ldots + \frac{a_n}{a_n^2 + a_1^2} \leqslant \frac{1}{2}\,.$$

5. Даны положительные числа a, b, c. Докажите, что $abc(a+b)(b+c)(c+a) \leqslant (a^2+bc)(b^2+ca)(c^2+ab)$.

6. Пусть a, b, c — стороны треугольника. Докажите неравенство $\dfrac{a}{b+c-a} + \dfrac{b}{c+a-b} + \dfrac{c}{a+b-c} \geqslant 3.$

7. Докажите неравенство $a^2 + b^2 + c^2 + 2abc < 2$, где a, b, c — стороны треугольника с периметром 2.

8. Докажите, что для любых положительных a, b, c, не больших 1, справедливо неравенство:

$$\frac{a}{1+bc} + \frac{b}{1+ac} + \frac{c}{1+ab} \leqslant 2\,.$$