28 октября 2013. Самые разные преобразования плоскости.

Определение. Преобразование плоскости $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ называется *движением*, если для любых точек плоскости A и B сохраняется расстояние между ними: $f(A)f(B) = AB$.

Определение. Преобразование плоскости $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ называется *преобразованием подобия*, если существует число k такое, что для любых точек плоскости A и B расстояние между ними увеличивается в k раз: $f(A)f(B) = k \cdot AB$.

1. Докажите, что **а)** движение; **б)** преобразование подобия переводит отрезки в отрезки.

2. Равные окружности S_1 и S_2 касаются окружности S внутренним образом в точках A_1 и A_2. Произвольная точка C окружности S соединена отрезками с точками A_1 и A_2. Эти отрезки пересекают окружности S_1 и S_2 в точках B_1 и B_2. Докажите, что $A_1A_2||B_1B_2$.

3. На отрезке AE по одну сторону от него построены равносторонние треугольники ABC и CDE (точка C лежит на отрезке AE). Точки M и P – середины отрезков AD и BE. Докажите, что треугольник CPM – равносторонний.

4. Окружность пересекает стороны AC, BC и AB положительно ориентированного треугольника в точках B_2 и B_1, A_2 и A_1, C_1 и C_2 (в порядке обхода по часовой стрелке). Оказалось, что перпендикуляры к сторонам AC, BC и AB, восстановленные в точках B_2, A_1 и C_1 соответственно, пересекаются в одной точке. Докажите, что перпендикуляры к тем же сторонам, восстановленные в точках B_1, A_2 и C_2, также пересекаются в одной точке.

5. Лемма Архимеда. Пусть A и B – фиксированные точки окружности S. Выберем одну из дуг окружности S с концами A и B и рассмотрим произвольную окружность, касающуюся отрезка AB и выбранной дуги. Обозначим точки касания через P и Q соответственно. Докажите, что все прямые PQ пересекаются в одной точке.

6. Точка Торричелли. Пусть T – такая точка плоскости, что сумма расстояний от неё до вершин данного остроугольного треугольника минимальна. Докажите, что все стороны треугольника видны из неё под углом $120°$.

7. В квадрате со стороной 1 расположена фигура, расстояние между любыми двумя точками которой не равно 0,001. Докажите, что площадь этой фигуры не превосходит **а)** 0,34 ; **б)** 0,287.

28 октября 2013. Самые разные преобразования плоскости.

Определение. Преобразование плоскости $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ называется *движением*, если для любых точек плоскости A и B сохраняется расстояние между ними: $f(A)f(B) = AB$.

Определение. Преобразование плоскости $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ называется *преобразованием подобия*, если существует число k такое, что для любых точек плоскости A и B расстояние между ними увеличивается в k раз: $f(A)f(B) = k \cdot AB$.

1. Докажите, что **а)** движение; **б)** преобразование подобия переводит отрезки в отрезки.

2. Равные окружности S_1 и S_2 касаются окружности S внутренним образом в точках A_1 и A_2. Произвольная точка C окружности S соединена отрезками с точками A_1 и A_2. Эти отрезки пересекают окружности S_1 и S_2 в точках B_1 и B_2. Докажите, что $A_1A_2||B_1B_2$.

3. На отрезке AE по одну сторону от него построены равносторонние треугольники ABC и CDE (точка C лежит на отрезке AE). Точки M и P – середины отрезков AD и BE. Докажите, что треугольник CPM – равносторонний.

4. Окружность пересекает стороны AC, BC и AB положительно ориентированного треугольника в точках B_2 и B_1, A_2 и A_1, C_1 и C_2 (в порядке обхода по часовой стрелке). Оказалось, что перпендикуляры к сторонам AC, BC и AB, восстановленные в точках B_2, A_1 и C_1 соответственно, пересекаются в одной точке. Докажите, что перпендикуляры к тем же сторонам, восстановленные в точках B_1, A_2 и C_2, также пересекаются в одной точке.

5. Лемма Архимеда. Пусть A и B – фиксированные точки окружности S. Выберем одну из дуг окружности S с концами A и B и рассмотрим произвольную окружность, касающуюся отрезка AB и выбранной дуги. Обозначим точки касания через P и Q соответственно. Докажите, что все прямые PQ пересекаются в одной точке.

6. Точка Торричелли. Пусть T – такая точка плоскости, что сумма расстояний от неё до вершин данного остроугольного треугольника минимальна. Докажите, что все стороны треугольника видны из неё под углом $120°$.

7. В квадрате со стороной 1 расположена фигура, расстояние между любыми двумя точками которой не равно 0,001. Докажите, что площадь этой фигуры не превосходит **а)** 0,34 ; **б)** 0,287.