24 октября 2013. Многочлены. Основная теорема арифметики.

Определение. Многочлен $f(x) \neq 0$ называется *неприводимым*, если его нельзя представить в виде $f(x) = g(x)h(x)$, где $deg\ g(x) > 0$, $deg\ h(x) > 0$.

1. Докажите, что если $f(x)g(x) \vdots h(x)$ и $(f(x), h(x)) = 1$, то $g(x) \vdots h(x)$.

2. Основная теорема арифметики. Любой многочлен может быть представлен в виде произведения неприводимых сомножителей единственным образом с точностью до перестановки и домножения сомножителей на константы.

Определение. Число a называется *корнем кратности* k многочлена $f(x)$, если $f(x)$ делится на $(x-a)^k$, но не делится на $(x-a)^{k+1}$. Числом корней многочлена *с учётом кратности* называется сумма кратностей всех его корней.

3. а) Докажите, что многочлен степени n может иметь не более n корней с учётом кратности.

б) Докажите, что если многочлены $f(x)$ и $g(x)$ принимают одинаковые значения в бесконечном числе точек, то они равны.

4. Пусть $f(x)$ – многочлен с целыми коэффициентами. Докажите, что для любых двух различных целых a и b верно, что $f(b) - f(a)$ делится на $b - a$.

5. Многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами таков, что $P(1) = 2013$, $P(2013) = 1$ и $P(m) = m$ для некоторого целого m. Чему может быть равно m?

6. Многочлен $P(x)$ даёт остаток 3 при делении на $x-1$, остаток 5 при делении на $x-2$ и остаток 7 при делении на $x-3$. Какой остаток многочлен $P(x)$ при делении на $(x-1)(x-2)(x-3)$?

7. Дан многочлен $f(x)$ такой, что многочлен $f(x^n)$ делится на многочлен $x-1$. Докажите, что многочлен $f(x)$ также делится на многочлен $x-1$.

8. а) Пусть a, b и c – различные действительные числа. Докажите, что при всех действительных x выполняется равенство

$$\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} + \frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)} + \frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} = 1\ .$$

б) Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ – различные действительные числа. Докажите, что при всех действительных x выполняется равенство

$$\frac{(x-a_2)(x-a_3)\ldots(x-a_n)}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)\ldots(a_1-a_n)} + \frac{(x-a_1)(x-a_3)\ldots(x-a_n)}{(a_2-a_1)(a_2-a_3)\ldots(a_2-a_n)} + \ldots + \frac{(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_{n-1})}{(a_n-a_1)(a_n-a_2)\ldots(a_n-a_{n-1})} = 1\ .$$

9. Пусть $P(x)$, $Q(x) \in \mathbb{Z}[x]$ – взаимно простые многочлены (то есть, $(P(x), Q(x)) = 1$). Докажите, что существует число C такое, что для всех целых n верно неравенство $(P(n), Q(n)) < C$.