21 октября 2013. Многочлены. Деление с остатком и алгоритм Евклида.

Определение 1. *Многочленом с действительными коэффициентами* называется выражение вида $P(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$, где $a_n, \ldots a_1, a_0 \in \mathbb{R}$ и $a_n \neq 0$. Число n называется *степенью* многочлена P, и обозначается $degP$. Множество всех многочленов с действительными коэффициентами обозначается через $\mathbb{R}[x]$. Аналогично, множество всех многочленов с рациональными коэффициентами обозначается через $\mathbb{Q}[x]$, с целыми коэффициентами – через $\mathbb{Z}[x]$, и т.д.

Многочлены $P_1(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ и $P_2(x) = b_m x^m + \ldots + b_1 x + b_0$ называются *равными* тогда и только тогда, когда $m = n$ и $a_k = b_k$ при всех $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$.

Каждому многочлену $P \in \mathbb{R}[x]$ можно поставить в соответствие функцию $x \to a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$. Через некоторое время мы докажем, что функции, заданные многочленами $P_1, P_2 \in \mathbb{R}[x]$ равны тогда и только тогда, когда многочлены P_1 и P_2 равны.

Определение 2. Многочлен P *делится* на многочлен $Q \neq 0$, если существует многочлен R такой, что $P = QR$.

Многочлен h является *общим делителем* многочленов f и g, если $f \vdots h$ и $g \vdots h$, и называется *наибольшим общим делителем*, если его степень не меньше степени любого другого общего делителя f и g.

1. Деление с остатком. Докажите, что для любых многочленов $f(x)$ и $g(x) \neq 0$ существуют единственные многочлены $q(x)$ и $r(x)$ такие, что $f(x) = g(x)q(x) + r(x)$ и $deg(r) < deg(g)$.

2. Теорема Безу. а) Докажите, что остаток от деления многочлена $f(x)$ на $x - a$ равен $f(a)$.

б) Докажите, что $f(x) \vdots x - a$ тогда и только тогда, когда $f(a) = 0$.

3. а) Алгоритм Евклида. Пусть $f(x)$ и $g(x) \neq 0$ – многочлены. Рассмотрим последовательные деления с остатком $f(x) = g(x)q_1(x) + r_1(x)$, $g(x) = r_1(x)q_2(x) + r_2(x)$, $r_1(x) = r_2(x)q_3(x) + r_3(x), \ldots$, $r_{n-2}(x) = r_{n-1}(x)q_n(x) + r_n(x)$, $r_{n-1}(x) = r_n(x)q_{n+1}(x)$. Докажите, что $(f(x), g(x)) = r_n(x)$.

б) Линейное представление НОД. Докажите, что для любых многочленов $f(x)$ и $g(x)$ существуют многочлены $u(x)$ и $v(x)$ такие, что $u(x)f(x) + v(x)g(x) = (f(x), g(x))$.

в) Докажите, что любой общий делитель двух многочленов делит их наибольший общий делитель.

4. Дан многочлен $(x^7 + x^5 + 1)^{20}$. Найдите его коэффициент при **а)** x^{18}; **б)** x^{17}.

5. Найдите **а)** сумму коэффициентов; **б)** знакопеременную сумму коэффициентов многочлена

$$(1 - 3x + 2x^2)^{743} \cdot (1 + 3x - 2x^2)^{744} .$$

6. Докажите, что **а)** $(x^m - 1, x^n - 1) = x^{(m,n)} - 1$;

б) $(x^{2^m} + 1, x^{2^n} + 1) = 1$ при $m \neq n$.

7. Избавьтесь от иррациональности в знаменателе дроби $\dfrac{1}{6\alpha^3 + 7\alpha^2 - 2\alpha - 1}$, где α – корень многочлена $2x^2 + x - 2$.