

17 октября 2013. Запрещённые графы и наследственные свойства.

Упражнение 1. Найдите максимальное количество рёбер в графе, если в нём n вершин и нет
а) циклов;
б) циклов нечётной длины.

Определение. *Подграфом* называется некий набор вершин и некоторых выходящих из них рёбер исходного графа.

Упражнение 2. Сколько подграфов можно выделить из полного графа на 3 вершинах?

Определение. Назовём *наследственным свойством* графа свойство, выполненное для всех его подграфов.

Упражнение 3. Приведите примеры наследственных свойств.

Попробуем придумать некоторые оценки на количества рёбер в графе с выполнением каких-либо наследственных свойств.

1. Найдите максимальное количество рёбер в графе, если в нём n вершин и нет
а) циклов чётной длины;
б) треугольников.

2. В графе на n вершинах любые два нечётных цикла не имеют общих рёбер. Найдите максимальное количество рёбер в нём.

3. **Лемма о наследственном свойстве.** Пусть $P(n)$ – наибольшее количество рёбер в графе с n вершинами, обладающим наследственным свойством P . Докажите, что $P(n) \leq \frac{n}{n-2} \cdot P(n-1)$.

Определение. *Клик* называется подграф на k вершинах, где каждая пара вершин соединена ребром.

4. **Теорема Турана.** Если в графе запрещены клики на k вершинах, то максимум количества рёбер в таком графе достигается на полном $k-1$ -дольном графе, где любые две доли отличаются по количеству вершин не более, чем на одну.

5. В графе 30 вершин, каждое ребро графа покрашено в красный или синий цвет так, что нет трёх вершин, попарно соединённых рёбрами одного цвета. Какое наибольшее количество рёбер может быть в этом графе?

6. Докажите, что в графе с $2n$ вершинами и $n^2 + 1$ ребром есть хотя бы n треугольников.

7. В графе любые два простых цикла нечётной длины не имеют общих рёбер. Докажите, что вершины этого графа можно раскрасить в два цвета так, чтобы каждая вершина была соединена ребром не более чем с одной вершиной такого же цвета.

8. Вася и Пушка играют в следующую игру на некотором графе G , в одной из вершин которого прячется Вася. Своим ходом Пушка стреляет в произвольную вершину графа. Если Вася прячется в ней, то он немедленно проигрывает. В противном случае Вася обязательно переходит в соседнюю вершину графа. Ни в какой момент игры Пушка Васю не видит. При каких графах G Пушка может победить, как бы ни бегал Вася?