

### 3 октября 2013. Неравенство о средних.

1. а) Пусть  $0 < a < a' < b' < b$  и  $a + b = a' + b' = S$ . Докажите, что  $ab < a'b'$ . (То есть, сближая два числа с постоянной суммой, их произведение увеличивается.)

б) Докажите **неравенство о среднем арифметическом и среднем геометрическом** для положительных чисел  $x_1, x_2, \dots, x_n$ :

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}.$$

в) Докажите его же по индукции: проверьте базу, научитесь переходить от  $n$  к  $2n$  и научитесь спускаться от  $m$  к  $m - 1$  (для этого подставьте вместо последней переменной среднее геометрическое всех остальных переменных).

2. а) Докажите, что сближая два положительных числа с постоянной суммой, сумма их квадратов уменьшается.

б) Докажите **неравенство о среднем арифметическом и среднем квадратичном** для положительных чисел  $x_1, x_2, \dots, x_n$ :

$$\sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n}} \geq \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}.$$

в) Докажите его же вручную, возведя обе части в квадрат.

3. а) Докажите, что сближая два числа с постоянным произведением, их сумма обратных величин уменьшается.

б) Докажите **неравенство о среднем геометрическом и среднем гармоническом** для положительных чисел  $x_1, x_2, \dots, x_n$ :

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}}.$$

в) Докажите его же, используя неравенство о среднем арифметическом и среднем геометрическом.

4. Пусть сумма двух положительных чисел  $a$  и  $b$  фиксирована. Как изменяются следующие выражения при сближении  $a$  и  $b$ : а)  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ ; б)  $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ ; в)  $a^n + b^n$  ?

5. Для положительных чисел  $a$  и  $b$  докажите неравенство  $\frac{a^6 + b^9}{4} \geq 3a^2 b^3 - 16$ .

6. Для положительных чисел  $a$  и  $b$  докажите неравенство  $2\sqrt{a} + 3\sqrt[3]{b} \geq 5\sqrt[5]{ab}$ .

7. Для положительного числа  $a$  докажите неравенство  $a^{40} + \frac{1}{a^{16}} + \frac{2}{a^4} + \frac{4}{a^2} + \frac{8}{a} \geq 16$ .

8. Докажите, что  $\sqrt{a+1} + \sqrt{2a-3} + \sqrt{50-3a} \leq 12$ . Достигается ли равенство?

9. Докажите для натуральных чисел  $a$  и  $b$  неравенство  $2^{a+b} \sqrt[a+2b]{a^{2b} b^{2a}} \leq a^2 + b^2$ .

10. Сейф имеет форму параллелепипеда. Передняя и задняя стенки сейфа изготовлены из материала, который в 8 раз дороже материала боковых стенок. Какой должна быть форма сейфа, чтобы при заданном объеме стоимость материала была наименьшей?