23 сентября 2013. Начинаем с разнобоя.

1. На столе лежат 2007 кучек, сначала в каждой кучке по одному ореху. Каждым ходом Петя берёт три кучки, в которых поровну орехов и объединяет их в одну. Через сколько ходов может закончиться это интересное занятие? (Процесс заканчивается только тогда, когда никакие кучки уже нельзя объединить.)

2. Найдите все пары простых чисел вида $\{a^n-1, a^n+1\}$, где a, n – натуральные числа, $n>1$.

3. Последовательность определена условиями $a_1=1, a_{n+1}=\dfrac{a_n}{1+na_n}$ при $n\geqslant 1$. Найдите a_{2013}.

4. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ диагональ AC делит диагональ BD пополам. Докажите, что произведение расстояний от точки внутри четырёхугольника до его сторон будет наибольшим, если эта точка — середина диагонали AC.

5. Пусть $f(x)=x^3-x$, $g(x)=x^3-3x^2+1$. Докажите, что при любых действительных a и b, сумма которых не равна 0, многочлен $af(x)+bg(x)$ имеет три различных действительных корня.

6. В стране 100 дорог (каждая соединяет ровно 2 города) и из любых трёх дорог можно выбрать две, которые не выходят из одного города. Докажите, что найдутся 40 дорог, никакие две из которых не выходят из одного города.

7. Положительные x, y, z таковы, что модуль разности любых двух из них меньше 2. Докажите неравенство $\sqrt{xy+1}+\sqrt{yz+1}+\sqrt{zx+1}>x+y+z$.

8. На сторонах AB, BC и AC треугольника ABC выбраны точки X и Y, Z и T, U и V соответственно. Оказалось, что четырёхугольники $XYZT$, $ZTVU$ и $XYVU$ – вписанные. Докажите, что шестиугольник $XYZTUV$ тоже вписанный.

23 сентября 2013. Начинаем с разнобоя.

1. На столе лежат 2007 кучек, сначала в каждой кучке по одному ореху. Каждым ходом Петя берёт три кучки, в которых поровну орехов и объединяет их в одну. Через сколько ходов может закончиться это интересное занятие? (Процесс заканчивается только тогда, когда никакие кучки уже нельзя объединить.)

2. Найдите все пары простых чисел вида $\{a^n-1, a^n+1\}$, где a, n – натуральные числа, $n>1$.

3. Последовательность определена условиями $a_1=1, a_{n+1}=\dfrac{a_n}{1+na_n}$ при $n\geqslant 1$. Найдите a_{2013}.

4. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ диагональ AC делит диагональ BD пополам. Докажите, что произведение расстояний от точки внутри четырёхугольника до его сторон будет наибольшим, если эта точка — середина диагонали AC.

5. Пусть $f(x)=x^3-x$, $g(x)=x^3-3x^2+1$. Докажите, что при любых действительных a и b, сумма которых не равна 0, многочлен $af(x)+bg(x)$ имеет три различных действительных корня.

6. В стране 100 дорог (каждая соединяет ровно 2 города) и из любых трёх дорог можно выбрать две, которые не выходят из одного города. Докажите, что найдутся 40 дорог, никакие две из которых не выходят из одного города.

7. Положительные x, y, z таковы, что модуль разности любых двух из них меньше 2. Докажите неравенство $\sqrt{xy+1}+\sqrt{yz+1}+\sqrt{zx+1}>x+y+z$.

8. На сторонах AB, BC и AC треугольника ABC выбраны точки X и Y, Z и T, U и V соответственно. Оказалось, что четырёхугольники $XYZT$, $ZTVU$ и $XYVU$ – вписанные. Докажите, что шестиугольник $XYZTUV$ тоже вписанный.