Асимптотика

10 класс

13.02.14

1. Докажите, что найдется число, представимое в виде суммы трех различных целых квадратов не менее чем миллионом различных способов.
2. Из клетчатой плоскости выбросили все клетки, обе координаты которых делятся на 100. Можно ли оставшиеся обойти конем (побывав на каждой по одному разу)?
3. Плоскость покрыта конечным числом углов. Докажите, что сумма их градусных мер не меньше 360^0.
4. Пусть $\sigma(n)$ — сумма цифр числа n. Докажите, что найдется бесконечно много n таких, что а) $\sigma(3^{n+1}) \leq \sigma(3^n)$ б) $\sigma(2^{n+1}) < \sigma(2^n)$ в) Докажите, что $\sigma(2^n) \to \infty$.
5. (Теорема Минковского) На плоскости дана выпуклая фигура площади больше четырех с центром симметрии в целой точке. Докажите, что внутри нее есть еще хотя бы одна целая точка.
6. На клетчатой плоскости стоит квадрат $n \times n$, составленный из фишек. Разрешается прыгать фишкой через соседнюю по стороне на свободную клетку, при этом фишка, через которую перепрыгнули, снимается. Докажите, что для любого $\varepsilon > 0$ ситуация, в которой нельзя больше сделать ни одного хода, может возникнуть не раньше, чем через $n^2\left(\frac{1}{2} - \varepsilon\right)$ ходов для всех достаточно больших n

---

Асимптотика

10 класс

13.02.14

1. Докажите, что найдется число, представимое в виде суммы трех различных целых квадратов не менее чем миллионом различных способов.
2. Из клетчатой плоскости выбросили все клетки, обе координаты которых делятся на 100. Можно ли оставшиеся обойти конем (побывав на каждой по одному разу)?
3. Плоскость покрыта конечным числом углов. Докажите, что сумма их градусных мер не меньше 360^0.
4. Пусть $\sigma(n)$ — сумма цифр числа n. Докажите, что найдется бесконечно много n таких, что а) $\sigma(3^{n+1}) \leq \sigma(3^n)$ б) $\sigma(2^{n+1}) < \sigma(2^n)$ в) Докажите, что $\sigma(2^n) \to \infty$.
5. (Теорема Минковского) На плоскости дана выпуклая фигура площади больше четырех с центром симметрии в целой точке. Докажите, что внутри нее есть еще хотя бы одна целая точка.
6. На клетчатой плоскости стоит квадрат $n \times n$, составленный из фишек. Разрешается прыгать фишкой через соседнюю по стороне на свободную клетку, при этом фишка, через которую перепрыгнули, снимается. Докажите, что для любого $\varepsilon > 0$ ситуация, в которой нельзя больше сделать ни одного хода, может возникнуть не раньше, чем через $n^2\left(\frac{1}{2} - \varepsilon\right)$ ходов для всех достаточно больших n