9 класс | Вокруг квадратного трёхчлена | 10 февраля 2014

1. Существуют ли действительные числа b и c такие, что каждое из уравнений $x^2+bx+c=0$ и $2x^2+(b+1)x+c+1=0$ имеет по два целых корня?

2. В каком наибольшем количестве различных целых точек квадратный трёхчлен ax^2+bx+c, у которого $a>100$, может принимать значения, по модулю не превосходящие 50?

3. Квадратный трёхчлен $f(x)$ разрешается заменить на один из следующих трёхчленов: $x^2\cdot f(\frac{1}{x}+1)$ или $(x-1)^2\cdot f(\frac{1}{x-1})$. Можно ли с помощью таких операций из квадратного трёхчлена x^2+4x+3 получить трёхчлен $x^2+10x+9$?

4. Различные числа a, b, c таковы, что уравнения $x^2+ax+1=0$ и $x^2+bx+c=0$ имеют общий действительный корень. Кроме того, общий действительный корень имеют уравнения $x^2+x+a=0$ и $x^2+cx+b=0$. Найдите сумму $a+b+c$.

5. Квадратный трёхчлен $f(x)=ax^2+bx+c$ таков, что уравнение $f(x)=x$ не имеет действительных корней. Докажите, что уравнение $f(f(x))=x$ также не имеет действительных корней.

6. Пусть $P(x)$ — квадратный трёхчлен с неотрицательными коэффициентами. Докажите, что для любых действительных чисел x и y справедливо неравенство $P^2(xy)\leqslant P(x^2)\cdot P(y^2)$.

7. Действительные числа a, b, c таковы, что для всех $x\in[-1;1]$ выполнено неравенство $|ax^2+bx+c|\leqslant 1$. Докажите, что при этих значениях x выполнено также неравенство $|cx^2+bx+a|\leqslant 2$.

8. Известно, что $f(x)$, $g(x)$ и $h(x)$ — квадратные трёхчлены. Может ли уравнение $f(g(h(x)))=0$ иметь корни 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 и 8?

9 класс | Вокруг квадратного трёхчлена | 10 февраля 2014

1. Существуют ли действительные числа b и c такие, что каждое из уравнений $x^2+bx+c=0$ и $2x^2+(b+1)x+c+1=0$ имеет по два целых корня?

2. В каком наибольшем количестве различных целых точек квадратный трёхчлен ax^2+bx+c, у которого $a>100$, может принимать значения, по модулю не превосходящие 50?

3. Квадратный трёхчлен $f(x)$ разрешается заменить на один из следующих трёхчленов: $x^2\cdot f(\frac{1}{x}+1)$ или $(x-1)^2\cdot f(\frac{1}{x-1})$. Можно ли с помощью таких операций из квадратного трёхчлена x^2+4x+3 получить трёхчлен $x^2+10x+9$?

4. Различные числа a, b, c таковы, что уравнения $x^2+ax+1=0$ и $x^2+bx+c=0$ имеют общий действительный корень. Кроме того, общий действительный корень имеют уравнения $x^2+x+a=0$ и $x^2+cx+b=0$. Найдите сумму $a+b+c$.

5. Квадратный трёхчлен $f(x)=ax^2+bx+c$ таков, что уравнение $f(x)=x$ не имеет действительных корней. Докажите, что уравнение $f(f(x))=x$ также не имеет действительных корней.

6. Пусть $P(x)$ — квадратный трёхчлен с неотрицательными коэффициентами. Докажите, что для любых действительных чисел x и y справедливо неравенство $P^2(xy)\leqslant P(x^2)\cdot P(y^2)$.

7. Действительные числа a, b, c таковы, что для всех $x\in[-1;1]$ выполнено неравенство $|ax^2+bx+c|\leqslant 1$. Докажите, что при этих значениях x выполнено также неравенство $|cx^2+bx+a|\leqslant 2$.

8. Известно, что $f(x)$, $g(x)$ и $h(x)$ — квадратные трёхчлены. Может ли уравнение $f(g(h(x)))=0$ иметь корни 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 и 8?