Теория чисел

10 класс

24.03.14

1. (*Китайская теорема об остатках*) Натуральные числа $m_1, \ldots, m_n$ попарно взаимно просты.
   а) Найдите в явном виде какое-нибудь целое число x, удовлетворяющее системе

$$\begin{cases} x \equiv 1 \ (mod\ m_1) \\ x \equiv 0 \ (mod\ m_2) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x \equiv 0 \ (mod\ m_n). \end{cases}$$

   б) Для любых целых $a_1, a_2, \ldots, a_n$ найдите все целые x, удовлетворяющие системе

$$\begin{cases} x \equiv a_1 \ (mod\ m_1) \\ x \equiv a_2 \ (mod\ m_2) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x \equiv a_n \ (mod\ m_n). \end{cases}$$

2. Докажите, что для любого простого $p > 2$ числитель m дроби

$$\frac{m}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{p-1}$$

   делится на p.

3. Существуют ли 100 подряд идущих чисел таких, что ровно 10 из них простые?

4. a, b, c - натуральные числа такие, что $ab + 9b + 81$ и $bc + 9c + 81$ делятся на 101. Докажите, что тогда и $ca + 9a + 81$ тоже делится на 101.

5. Докажите, что существуют 18 последовательных натуральных чисел, среди которых нет числа, попарно взаимно простого со всеми остальными.

6. При каких натуральных $n > 1$ существуют такие натуральные $b_1, ..., b_n$ (не все из которых равны), что при всех натуральных k число $(b_1 + k)(b_2 + k)..(b_n + k)$ является степенью натурального числа? (Показатель степени может зависеть от k , но должен быть всегда больше 1.)

7. Для заданного натурального числа $k > 1$ через $Q(n)$, $n \in \mathbb{N}$, обозначим наименьшее общее кратное чисел $n, n+1, \ldots, n+k$. Докажите, что существует бесконечно много $n \in \mathbb{N}$ таких, что $Q(n) > Q(n+1)$.

8. Даны натуральные числа x и y из отрезка $[2, 100]$. Докажите, что при некотором натуральном n число $x^{2^n} + y^{2^n}$ - составное.