Суперпозиция

10 класс

03.02.14

Подсказка. $C_{p^n}^k \,\vdots\, p$, p – простое ($k \neq 0, k \neq p^n$).

1. По кругу стоят 128 целых чисел. За один ход все числа одновременно заменяются на сумму двух своих соседей. Докажите, что через несколько ходов все числа станут делиться на 128.

1) По кругу стоит одна единица и 127 нулей. Что получится через 7 ходов? Докажите, что через несколько ходов все числа станут четными.

2) Определим понятие *суммы(суперпозиции)* двух начальных расстановок чисел по кругу. В каких отношениях находится эта сумма с операцией замены чисел?

2. (Интерполяционный многочлен Лагранжа.) Докажите что для любого набора из $n+1$ точки с разными абсциссами найдется (единственный) многочлен степени не выше n, который в этих точках принимает заданные значения.

Указание. Что здесь является аналогами начальной расстановки, операции и суммы расстановок? Через какие специфические(="базисные") многочлены выражается интерполяционный многочлен Лагранжа? Напишите для него явную формулу.

3. (Китайская теорема об остатках.) а) Даны попарно взаимно простые числа $m_1, m_2, \ldots, m_n$ и произвольные $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Докажите, что существует такое число A, что $A \equiv a_i \pmod{m_i}$.

б) Число A определено однозначно по модулю $m_1 \ldots m_n$.

4. Есть числа $a_1, \ldots, a_n$, среди них ровно два одинаковых. Напишите выражение от $a_1, \ldots, a_n$, значение которого равно этим одинаковым числам.

Для многочлена $P(x)$ рассмотрим последовательность сумм

$$S_n = P(0) + P(1) + \cdots + P(n).$$

Случай $P(x) = x^k$ представляет особенный интерес.

5. Найдите явную формулу для S_n хоть для какого-нибудь многочлена степени k.

а) **Опр.** *Икс в убывающей степени* m: $x^{\underline{m}} = x(x-1)(x-2)\ldots(x-m+1)$.

б) Докажите, что а) $(x+1)^{\underline{m}} - x^{\underline{m}} = mx^{\underline{m-1}}$;

в) Найдите $1^{\underline{m}} + 2^{\underline{m}} + 3^{\underline{m}} + \cdots + (n-1)^{\underline{m}}$.

6. Докажите, что S_n (от многочлена степени k) есть многочлен степени $k+1$ (то есть $S_n = g(n)$ для некоторого многочлена $g(x)$). Для примера вычислите $1^4 + \cdots + n^4$.