Показатели

10 класс

24.02.14

Определение. При $(a, m) = 1$ существует натуральное δ с условием $a^\delta \equiv 1\ (mod\ m)$. Наименьшее из таких чисел называется *показателем a по модулю m.*

1. а. Числа $1 = a^0, a^1, \ldots, a^{\delta-1}$ несравнимы.

   б. $a^s \equiv a^t\ (mod\ m)\ (s, t \geq 0) \Leftrightarrow s \equiv t\ (mod\ \delta)$. В частности, $a^s \equiv 1\ (mod\ m) \Leftrightarrow s \vdots \delta$.

   в. δ является делителем $\varphi(m)$.

---

2. Найдите все простые p и q такие, что $2^p - 1 \vdots q,\ 2^q - 1 \vdots p$.

3. Докажите, что для любого натурального n простые делители числа $2^{2^n} + 1$ имеют вид $2^{n+1}x + 1$.

4. Докажите, что для любого натурального $a > 1$ правильных несократимых дробей со знаменателем $a^n - 1$ кратно n.

5. p, q - простые числа, $q > 5$. Докажите, что если $q | 2^p + 3^p$, то $q > p$.

6. Докажите, что $2^n - 1$ не делится на n при натуральном $n > 1$.

7. $a > 1, p > 2, p$ - простое.

   а. Докажите, что простые нечетные делители числа $a^p - 1$ или делят $a - 1$, или имеют вид $2px + 1$.

   б. Докажите, что число $\dfrac{a^p - 1}{a - 1}$ имеет хотя бы один простой множитель, не являющийся делителем $a - 1$.

   в. Докажите, бесконечность множества простых чисел вида $2px + 1$.

8. Известно, что число $2^{32} + 1$ раскладывается на простые множители как $641 \cdot 6700417$. Докажите, что существует такое натуральное k, что для любого натурального n число $k2^n + 1$ будет составным.